PROBLEME PREGĂTITOARE PENTRU OBMJ 2011

I. Probleme de ... ciocnire elastică

1. Zece vapoare navighează pe o linie est-vest. Cinci dintre ele pleacă din est spre vest, iar celelalte cinci pleacă din vest înspre est. Cele zece vapoare navighează mereu cu o aceeaşi viteză constantă. De oridecâte ori două vapoare se întâlnesc, fiecare din ele se întoarce şi îşi continuă drumul în sensul contrar. Când toate vapoarele au ajuns din nou într-un port, câte întâlniri între două vapoare au avut loc?

2. La o grădiniţă copiii stau pe un rând cu faţa la educatoare. Aceasta dă comanda "la stânga". Copiii se întorc, care la stânga, care la dreapta. Apoi când doi copii se trezesc faţă-în-faţă, aceştia fac stânga împrejur. Demonstraţi că după un timp copiii stau nemişcaţi.

3. Un ceas mecanic avea geamul spart. La orele 12:00:00 trei muşte s-au aşezat pe câte un segment reprezentat de acul orar, minutar, respectiv secundar al ceasului şi au rămas aşezate pe ele la aceeaşi distanţă diferită de zero, de centrul discului determinat de cadranul ceasului. Când poziţiile oricăror două ace indicatoare coincideau, cele 2 muşte aşezate pe ele treceau una în locul celeilalte. În cazul în care coincideau poziţiile la toate cele 3 ace indicatoare, doar muştele de pe acul orar şi cel secundar îşi schimbau locul. Câte rotaţii complete de forma unui cerc imaginar generat de mişcarea acului pe care se afla, a efectuat fiecare muscă până la ora 24:00:00?

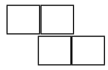
II. Colorări

4. Un cerc este împărţit de $2n$ puncte în $2n$ arce de lungime 1. Aceste puncte sunt unite în perechi pentru a forma n coarde. Fiecare din aceste coarde împarte cercul în două arce, fiecare din ele având lungimea un număr par. Arătaţi că n este par.

5. Un pătrat 4×4 este împărţit în pătrate unitate. Unele din pătrăţele se colorează. Determinaţi numărul colorărilor în care pe fiecare linie şi coloană avem exact două pătraţele colorate.

6. Într-o tablă a înmulţirii numărul situat pe linia a i-a şi coloana a j-a este produsul ij. Dintr-o subtablă $m \times n$, cu m şi n ambele impare, este înlăturat dreptunghiul interior $(m-2) \times (n-2)$ lăsând în urmă un cadru de lăţime 1. Pătrăţelele cadrului se vopsesc alternativ cu alb şi negru. Arătaţi că suma numerelor din pătrăţelele albe este egală cu suma numerelor din pătrăţelele negre.

7. O tablă pătrată este împărţită în n^2 celule dreptunghiulare prin $n-1$ linii orizontale şi $n-1$ linii verticale. Celulele se colorează alternativ în alb şi negru, ca la o tablă de şah. Una din diagonale are proprietatea că trece numai prin celule negre. Arătaţi că aria totală a celulelor negre este cel puţin cât aria totală a celulelor albe.

8. Determinaţi cel mai mare număr de figuri congruente cu  care pot fi plasate pe o tablă 7×7 (fără suprapuneri) astfel ca fiecare figură să acopere exact 4 pătrăţele.

9. Fie $n \geq 3$ un număr natural. $2n$ puncte împart un cerc în $2n$ arce. Fiecare arc poate avea lungimea a, b sau c şi nicicare două arce adiacente nu au aceeaşi lungime. Cele $2n$ puncte se colorează alternativ cu roşu şi albastru. Arătaţi că poligonul cu n laturi format cu vârfurile roşii are acelaşi perimetru şi aceeaşi arie ca şi poligonul cu n laturi format cu vârfurile albastre.

III. Jocuri

10. Fiind dat un pătrat $n \times n$, doi jucători, A şi B, joacă următorul joc:
la început toate celulele pătratului sunt goale, iar jucătorii joacă alternativ monede. Începe jucătorul A. La fiecare mutare un jucător va plasa o monedă într-o celulă goală care nu se învecinează cu nicio celulă în care este deja o monedă. Jucătorul care face ultima mutare este câştigătorul. Care jucător are strategie câştigătoare şi care este aceasta ?
(Două celule se numesc vecine dacă au o latură comună.)

11. Un joc se joacă pe o tablă 23×23. Primul jucător controlează doi pioni care pornesc din colţul din dreapta-sus, respectiv stânga-jos. Cel de-al doilea jucător controlează doi pioni care pornesc din celelalte două colţuri. Jucătorii mută alternativ. La fiecare mutare, un jucător poate muta unul dintre pionii săi pe o căsuţă liberă vecină (una cu latură comună). Primul jucător câştigă dacă dacă pionii săi ajung în pătrate vecine. Poate cel de-al doilea jucător să-l împiedice pe primul să câştige?

12. 2002 cartonaşe pe care sunt înscrise numerele de la 1 la 2002 sunt aşezate cu faţa în sus pe o masă. Doi jucători aleg, alternativ, câte un cartonaş de pe masă până când nu mai rămân cartonaşe pe masă. Câştigă jucătorul care are ultima cifră a sumei numerelor de pe cartonaşele sale mai mare.
Care din cei doi jucători are o strategie câştigătoare şi cum trebuie el să joace ?

13. O monedă este plasată în colţul din stânga-jos al unei table de şah. Jucătorii A şi B joacă următorul joc: A începe jocul şi, atunci când este la rând, fiecare jucător mută moneda într-o poziţie care este imediat deasupra, la dreapta, la dreapta-sus, la stânga-sus sau la dreapta-jos. Jucătorul care efectuează ultima mutare câştigă. Care din cei doi jucători are strategie câştigătoare şi care este aceasta ?

14. Avem trei cutii. Prima cutie conţine 20 de monede, a doua cutie conţine 30 de monede, iar a treia cutie conţine 40 de monede. Doi jucători joacă următorul joc:
fiecare jucător alege o cutie şi scoate din ea un număr nenul de monede. Jucătorul care scoate ultima monedă câştigă. Cine are strategie câştigătoare şi care este aceasta ?

IV. Inegalităţi

15. Demonstraţi că pentru orice $x, y, z > 0$ are loc inegalitatea

$$x^2 + y^2 + z^2 + xyz + 4 \geq 2(xy + yz + zx).$$

16. Dacă $a, b, c \in (1, 4)$, atunci

$$\frac{c^2 + a^2}{-c + 2a + 2b} + \frac{a^2 + 2b^2}{-b + 2c + 2a} + \frac{b^2 + 3c^2}{-a + 2b + 2c} \geq \frac{2a + 3b + 4c}{6}.$$

V. Probleme diverse

17. Se numeşte număr cu ghinion, un număr cu suma cifrelor 13. Aflaţi $n \geq 2$ minim pentru care există $a_1, a_2, ..., a_n$, numere cu ghinion cu suma un număr cu ghinion.

18. Parlamentul ţării Ainamor este partiţionat în n comiţii, astfel incât

- 1) fiecare parlamentar aparţine uneia şi uneia singure dintre comiţii;
- 2) fiecare comiţie conţine cel puţin 5 parlamentari;
- 3) numerele de parlamentari din cele n comiţii sunt toate distincte.

După o primă sesiune de lucru, comiţiile sunt dizolvate şi se încearcă o nouă partiţionare, după aceleaşi reguli de mai sus. Mai mult de atât, oricare doi parlamentari care au făcut parte din aceiaşi comiţie veche, nu pot face parte împreună dintr-o comiţie nouă. Se constată că nu este posibilă respectarea regulii 1), aşa încât un număr de N parlamentari rămîn în afara noilor comiţii.
i) Determinaţi numărul minim $N(n)$ de parlamentari care vor trebui să rămână în afara noilor comiţii.
ii) Arătaţi ca acest număr minim $N(n)$ poate fi efectiv realizat, pentru orice n.

19. În câte moduri poate fi scris numărul 2011 ca sumă de numere naturale nenule (unul sau mai multe) care sunt ,,*aproximativ egale*"?
Scrieri obţinute una din alta prin schimbarea ordinii termenilor nu se consideră a fi diferite.

Două numere se numesc ,,*aproximativ egale*" dacă diferenţa dintre ele este cel mult 1.

20. Arătaţi că orice număr natural nenul poate fi reprezentat sub forma

$$3^{u_1} \cdot 2^{v_1} + 3^{u_2} \cdot 2^{v_2} + ... + 3^{u_k} \cdot 2^{v_k}$$

cu $u_1, u_2, ..., u_k, v_1, v_2, ..., v_k \in \mathbb{N}$ verificând $u_1 > u_2 > ... > u_k \geq 0$ şi $0 \leq v_1 < v_2 < ... < v_k$.

21. Fie E şi F mijloacele laturilor $[BC]$, respectiv $[CD]$ ale patrulaterului convex $ABCD$. Segmentele $[AE]$, $[AF]$ şi $[EF]$ taie $ABCD$ în patru triunghiuri ale căror arii sunt patru numere naturale nenule consecutive. Aflaţi aria maximă a triunghiului BAD.

22. Pe tablă ai scrise numerele de la 1 la 1000. Înlocuieşte două numere, a şi b, cu numărul $ab + a + b$. După repetări, ce număr rămâne la sfârşit? Este acesta mereu acelaşi ?

23. Se poate pava un dreptunghi 2003×2003 cu dominouri 1×2 plasate orizontal şi dreptunghiuri 1×3 plasate vertical ?

24. În trei grămezi sunt 51, 49 şi respectiv 5 pietre. Poţi fie împreuna două grămezi, fie împărţi o grămadă conţinând un număr par de pietre în două grămezi egale. Putem obţine 105 grămezi cu câte o piatră ?

25. 101 numere sunt scrise pe o tablă: 1^2, 2^2, ..., 101^2. Alex alege două numere şi le înlocuieşte cu modulul diferenţei lor. El repetă această operaţie până când pe tablă rămâne un singur număr. Care este cea mai mică valoare posibilă a acestui număr ?

26. Şirul $1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, ...$ constă din numerele naturale care sunt puteri ale lui 3 sau se scriu ca sumă de puteri distincte ale lui 3. Găsiţi cel de-al 100-lea termen al şirului.

27. Numerele din şirul 101, 104, 109, 116, ... sunt de forma $a_n = 100 + n^2$, unde $n = 1, 2, 3, ...$. Pentru fiecare n, notăm d_n cel mai mare divizor comun al numerelor a_n şi a_{n+1}. Aflaţi cea mai mare valoare a lui d_n când n parcurge $\mathbb{N}^*$.