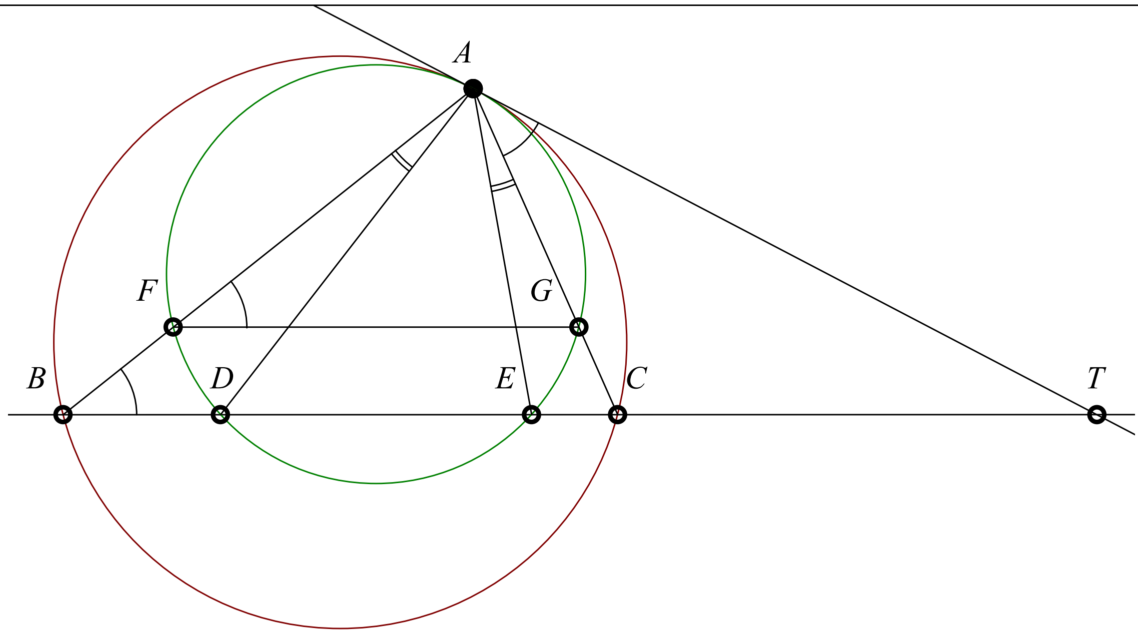
Cercuri tangente şi drepte izogonale

Un cerc care este tangent interior la cercul circumscris unui triunghi oarecare ABC, intersectează latura $[BC]$ în punctele D şi E. Arătaţi că: $\widehat{BAD} \equiv \widehat{CAE}$.

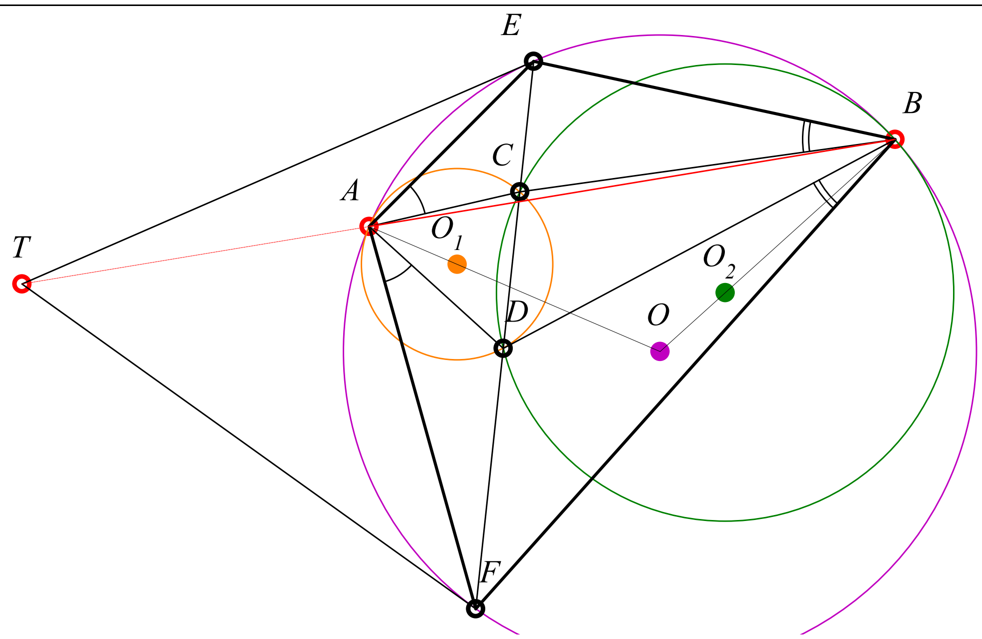


SOLUŢIE (*M.Miculiţa*): Notând cu F şi $G-$cel de al doilea punct de intersectie al cercului circumscris triunghiului ADE, în mod respectiv cu laturile $[AB]$ şi $[AC]$; iar cu $T-$punctul de intersecţie al tangentei commune din A, al celor două cercuri, cu dreapta suport a laturii $[BC]$, avem:

$$\left.\begin{array}{l} AT \cap \odot AFG = \{A\} \Rightarrow \widehat{AFG} \equiv \widehat{TAC} \\ AT \cap \odot ABC = \{A\} \Rightarrow \widehat{ABC} \equiv \widehat{TAC} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{AFG} \equiv \widehat{ABC} \Rightarrow FG \parallel BC \Rightarrow \widehat{DF} \equiv \widehat{EG} \Rightarrow \widehat{BAD} \equiv \widehat{CAE}. \blacksquare$$

APLICAŢIE (Problema M2219 din KVANT, nr.2/2011; pag.27):

Două cercuri, care nu sunt congruente (O_1) şi (O_2) sunt tangente interior la cercul (O), în punctele A si B. Cercurile (O_1) şi (O_2) sunt secante în punctele C şi D; iar dreapta CD intersectează cercul (O) în punctele E şi F. Notăm cu $T-$de intersecţie al tangentelor duse la cercul (O) în punctele E şi F. Arătaţi că dreapta AB trece prin punctul T.



SOLUŢIE (Mihai Miculiţa): Întrucât cercul (O_1) este tangent interior la cercul (O), (circumscris triunghiului AEF), ne găsim în ipotezele **teoremei** care face obiectul problemei anterioare; aşa că are loc şi concluzia sa, din care pe baza teoremei lui Steiner, obţinem că:

$$\widehat{CAE} \equiv \widehat{DAF} \Rightarrow \frac{|EC| \cdot |ED|}{|FC| . |FD|} = \left(\frac{|AE|}{|AF|} \right)^2 . \quad (1)$$

În mod analog, deducem că: $\frac{|EC| \cdot |ED|}{|FC| . |FD|} = \left(\frac{|BE|}{|BF|} \right)^2 . \quad (2)$

Din relaţiile (1) şi (2), rezultă că: $\frac{|AE|}{|AF|} = \frac{|BE|}{|BF|} \Leftrightarrow |AE| . |BF| = |AF| . |BE| \Rightarrow$ patrulaterul inscriptibil $AFBE -$ este un ***patrulater armonic***; aşa că: diagonala sa $AB -$ este simediană în $\Delta BEF \Rightarrow T \in AB.$ ■