Ecuaţii diofantice: ecuaţii Pell – Fermat

Material realizat de Ioan Caşu (Universitatea de Vest din Timişoara) şi de Árpád Bényi (Western Washington University, USA) în cadrul proiectului "Sustaining Excellence in Mathematical Education" – SusMathEdu

Clasa a IX-a – 1 noiembrie 2013

Leonhard Euler l-a creditat în mod eronat pe matematicianul englez John Pell cu primul studiu aprofundat al soluţiilor ecuaţiilor de forma $u^2 - Dv^2 = 1$. Acestea ar fi trebuit numite ecuaţiile lui Fermat, deoarece el a fost primul care a cercetat proprietăţile soluţiilor netriviale ale acestora. Ecuaţiile de tip Pell au o lungă istorie care începe cu vechii greci; Theon din Smyrna a folosit în aproximarea lui $\sqrt{2}$ fracţii de forma u/v, unde u şi v sunt soluţii ale ecuaţiei $u^2 - 2v^2 = 1$. în 1657, Fermat a afirmat, fără să demonstreze, că dacă D este un număr natural care nu este pătrat perfect, atunci ecuaţia $u^2 - Dv^2 = 1$ are o infinitate de soluţii. Tot în 1657, Fermat i-a provocat pe John Wallis şi pe William Brouncker să afle soluţiile minimale ale ecuaţiilor $u^2 - 151v^2 = 1$ şi respectiv $u^2 - 313v^2 = 1$; Wallis a găsit soluţia $(1728148040, 140634693)$ pentru prima ecuaţie, iar Brouncker a determinat soluţia $(126862368, 7170685)$ pentru cea de a doua. În 1766, Lagrange a demonstrat că ecuaţia $u^2 - Dv^2 = 1$ are o infinitate de soluţii pentru orice număr natural D care nu este pătrat perfect.

1. **Ecuaţia Pell pozitivă** $u^2 - Dv^2 = 1$

T1. Dacă D este un număr natural care nu este pătrat perfect, atunci ecuaţia

$$u^2 - Dv^2 = 1 \tag{1}$$

are o infinitate de soluţii în mulţimea numerelor naturale, iar soluţia generală a ecuaţiei (1) este dată de $(u_n, v_n)_{n\geq 1}$, unde

$$u_{n+1} = u_0u_n + Dv_0v_n; \quad v_{n+1} = v_0u_n + u_0v_n; \; u_1 = u_0, v_1 = v_0, \quad \forall n \geq 1, \tag{2}$$

unde (u_0, v_0) este *soluţia fundamentală* a ecuaţiei, adică *cea mai mică soluţie* diferită de soluţia trivială $(1, 0)$.

Observaţii. 1. Deoarece orice soluţie (u, v) a ecuaţiei (1) conduce la soluţiile $(u, -v), (-u, v), (-u, -v)$ ale ecuaţiei în mulţimea numerelor întregi este suficient să rezolvăm ecuaţia în mulţimea numerelor naturale.
2. Soluţia (u_0, v_0) este *cea mai mică* în sensul că este acea soluţie a ecuaţiei (1) diferită de $(1, 0)$ pentru care valoarea expresiei $u + v\sqrt{D}$ este minimă.
3. Pentru a obţine **toate** soluţiile ecuaţiei Pell (1) trebuie adăugată la mulţimea de soluţii din soluţia generală şi soluţia trivială $(1, 0)$.
4. Este un exerciţiu de rutină să se demonstreze că ecuaţia (1) cu D pătrat perfect (nenul) nu are alte soluţii în mulţimea numerelor naturale cu excepţia soluţiei $(1, 0)$.

T2. Soluţia generală (2) a ecuaţiei (1) se poate obţine şi din *recurenţa de ordinul 2*

$$\begin{cases} u_{n+2} - 2u_0 u_{n+1} + u_n = 0, & u_1 = u_0,\ u_2 = u_0^2 + Dv_0^2, \quad \forall n \geq 1; \\ v_{n+2} - 2u_0 v_{n+1} + v_n = 0, & v_1 = v_0,\ v_2 = 2u_0 v_0, \quad \forall n \geq 1. \end{cases} \tag{3}$$

T3. Soluţia generală a ecuaţiei Pell pozitive (1) este dată de egalităţile:

$$\begin{cases} u_n = \frac{1}{2}\left[(u_0 + v_0\sqrt{D})^n + (u_0 - v_0\sqrt{D})^n\right] \\ v_n = \frac{1}{2\sqrt{D}}\left[(u_0 + v_0\sqrt{D})^n - (u_0 - v_0\sqrt{D})^n\right] \end{cases}, \quad \forall n \geq 1. \tag{4}$$

2. **Ecuaţii Pell generalizate** $ax^2 - by^2 = 1 \quad (5)$,
unde a, b sunt numere naturale nenule.

T4. Dacă ab este pătrat perfect, atunci ecuaţia (5) nu are soluţii în mulţimea numerelor naturale.

T5. Dacă ecuaţia (5) are soluţii în mulţimea numerelor naturale şi (A, B) este *cea mai mică soluţie* a acesteia, atunci soluţia generaă a ecuaţiei Pell generalizate (5) este dată de

$$x_n = Au_n + bBv_n; \quad y_n = Bu_n + aAv_n,\ \forall n \geq 1$$

unde $(u_n, v_n)_{n\geq1}$ este soluţia generală a ecuaţiei Pell pozitive $u^2 - abv^2 = 1$.

Observaţii. 1. Ecuaţia Pell pozitivă $u^2 - abv^2 = 1$ se numeşte *rezolventa Pell* a ecuaţiei Pell generalizate (5). Deoarece din teorema T1 ecuaţia (5) nu are soluţii dacă produsul ab nu este pătrat perfect rezultă că dacă ecuaţia (5) are soluţii (ceea ce teorema T5 presupune ca ipoteză), atunci ab nu este pătrat perfect, ceea ce ne situează în ipotezele teoremei T1 şi ne asigură de existenţa soluţiei generale (u_n, v_n) din enunţul acestei teoreme.
2. Cea mai mică soluţie a ecuaţiei (5) este definită ca fiind soluţia (x, y) ecuaţiei pentru care valoarea expresiei $x\sqrt{a} + y\sqrt{b}$ este minimă.

3. Ecuaţia Pell negativă $u^2 - Dv^2 = -1$ (6)

Spre deosebire de ecuaţia Pell pozitivă, există valori $D \geq 2$ care nu sunt pătrate perfecte pentru care ecuaţia Pell negativă (6) **nu are soluţii în mulţimea numerelor naturale** - de exemplu $D = 3$ (a se vedea şi Tabelul 1 de la finalul materialului).

T6. Dacă ecuaţia (6) are soluţii în mulţimea numerelor naturale şi (A, B) este cea mai mică soluţie a acesteia, atunci soluţia generală a ecuaţiei (6) este dată de $(x_n, y_n)_{n\geq 1}$, unde

$$x_n = Au_n + DBv_n; \quad y_n = Bu_n + Av_n,\ \forall n \geq 1,$$

iar $(u_n, v_n)_{n\geq 1}$ este soluţia generală a ecuaţiei Pell **pozitive** asociate $u^2 - Dv^2 = 1$ (prezentată în teoremele T1, T2 şi T3).

Observaţii. 1. La soluţia generală a ecuaţiei Pell negative (6) trebuie adăugată şi soluţia (A, B) pentru a obţine corect mulţimea tuturor soluţiilor.
2. Un calcul direct conduce la următoarele expresii pentru soluţia generală a ecuaţiei Pell negative (6):

$$\begin{cases} x_n = \frac{1}{2}\left[(A + B\sqrt{D})(u_0 + v_0\sqrt{D})^n + (A - B\sqrt{D})(u_0 - v_0\sqrt{D})^n\right] \\ y_n = \frac{1}{2\sqrt{D}}\left[(A + B\sqrt{D})(u_0 + v_0\sqrt{D})^n - (A - B\sqrt{D})(u_0 - v_0\sqrt{D})^n\right] \end{cases},\ \forall n \geq 1.$$

3. Rezultatul din teorema T6 se putea obţine din cel cuprins în teorema T5 pentru $a = D, b = 1$ şi renotând $x = v, y = u$.

Listă de probleme

P1. Determinaţi toate perechile (k, m) de numere naturale nenule pentru care are loc egalitatea

$$1 + 2 + \ldots + k = (k + 1) + (k + 2) + \ldots (k + m).$$

P2. Determinaţi toate numerele triunghiulare care sunt pătrate perfecte.

P3. Determinaţi toate numerele naturale m pentru care $2m + 1$ şi $3m + 1$ sunt ambele pătrate perfecte. Arătaţi că toate numerele m cu această proprietate sunt divizibile cu 40.

P4. Arătaţi că dacă ecuaţiile Pell generalizate (generalizarea este însă în alt sens decât ın preliminariile teoretice din secţiunea 2) $x^2 - 5y^2 = a$ şi $x^2 - 5y^2 = b$ au fiecare soluţie, atunci ecuaţia $x^2 - 5y^2 = ab$ are de asemenea soluţie.

P5. Determinaţi toate triunghiurile pentru care lungimile laturilor sunt numere naturale consecutive şi aria este exprimată de asemenea printr-un număr natural. *(De exemplu, triunghiurile având lungimile laturilor* $3, 4, 5$*, respectiv* $13, 14, 15$ *au această proprietate).*

P6. Determinaţi toate valorile întregi ale lui a pentru care ecuaţia

$$x^2 + axy + y^2 = 1$$

are o infinitate de soluţii întregi (x, y).
(*Problemă propusă la Olimpiada de Matematică din Irlanda, 1995*)

P7. Arătaţi că există o infinitate de cvadruplete (x, y, z, t) de numere naturale prime între ele pentru care

$$x^3 + y^3 + z^2 = t^4.$$

P8. Arătaţi că ecuaţia

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 1999$$

are o infinitate de soluţii în mulţimea numerelor întregi.

P9. Dacă (u_0, v_0) este soluţie în mulţimea numerelor naturale pentru ecuaţia $u^2 - Dv^2 = 1$ şi (x_0, y_0) este soluţie în mulţimea numerelor naturale pentru ecuaţia $x^2 - Dy^2 = k$, să se arate că (X, Y) cu $X = x_0u_0 + Dy_0v_0$ şi $Y = x_0v_0 + y_0u_0$ este de asemenea soluţie în mulţimea numerelor naturale pentru ecuaţia $x^2 - Dy^2 = k$. Să se deducă de aici că ecuaţia $x^2 - 7y^2 = 2$ are o infinitate de soluţii în mulţimea numerelor naturale.

P10. Găsiţi toate soluţiile în mulţimea numerelor naturale nenule pentru ecuaţia

$$x^2 - 6xy + y^2 = 1.$$

P11. Se consideră ecuaţia $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = m^4$, cu necunoscutele $m, n \in \mathbb{N}^*$.
(a) Să se afle trei soluţii ale ecuaţiei.
(b) Să se arate că ecuaţia are o infinitate de soluţii.
(*Problemă propusă la etapa finală a Concursului Interjudeţean de Matematică "Traian Lalescu", 2008*)

P12. Demonstraţi că există o infinitate de numere naturale m cu proprietatea că $m^2 + 1$ divide $m!$.

Bibliografie

[1] T. Andreescu, D. Andrica, O introducere în studiul ecuaţiilor diofantiene, Editura GIL, Zalău, 2002.
[2] T. Andreescu, D. Andrica, Z. Feng, 104 number theory problems, Birkhäuser, Boston, 2007.
[3] T. Andreescu, R. Gelca, Mathematical olympiad challenges, Birkhäuser, Boston, 2000, 2nd edition.
[4] T. Andreescu, D. Andrica, Number theory: structures, examples and problems, Birkhäuser, 2009.
[5] T. Koshy, Elementary number theory with applications, Academic Press, Elsevier, London, 2007.
[6] L. Panaitopol, D. Şerbănescu, Probleme de teoria numerelor şi combinatorică pentru juniori, Editura GIL, Zalău, 2003.
[7] W. Sierpinski, 250 problems in elementary number theory, Elsevier, New

York, 1970.
[8] Ediţiile electronice ale Gazetei Matematice (1895-2010) şi Revistei Matematice din Timişoara (1921-2006).
[9] Resurse www: www.tmmate.ro, www.olimpiade.ro, www.mategl.com.

D	A	B	D	A	B	D	A	B
2	1	1	37	6	1	73	1068	125
5	2	1	41	32	5	74	43	5
10	3	1	50	7	1	82	9	1
13	18	5	53	182	25	85	378	41
17	4	1	58	99	13	89	500	53
26	5	1	61	29718	3805	97	5604	569
29	70	13	65	8	1	101	10	1

Tabel 1. Soluţiile fundamentale ale **ecuaţiei Pell negative**

D	u_0	v_0	D	u_0	v_0	D	u_0	v_0
2	3	2	38	37	6	71	3480	413
3	2	1	39	25	4	72	17	2
5	9	4	40	19	3	73	2281249	267000
6	5	2	41	2049	320	74	3699	430
7	8	3	42	13	2	75	26	3
8	3	1	43	3482	531	76	57799	6630
10	19	6	44	199	30	77	351	40
11	10	3	45	161	24	78	53	6
12	7	2	46	24335	3588	79	80	9
13	649	180	47	48	7	80	9	1
14	15	4	48	7	1	82	163	18
15	4	1	50	99	14	83	82	9
17	33	8	51	50	7	84	55	6
18	17	4	52	649	90	85	285769	30996
19	170	39	53	66249	9100	86	10405	1122
20	9	2	54	485	66	87	28	3
21	55	12	55	89	12	88	197	21
22	197	42	56	15	2	89	500001	53000
23	24	5	57	151	20	90	19	2
24	5	1	58	19603	2574	91	1574	165
26	51	10	59	530	69	92	1151	120
27	26	5	60	31	4	93	12151	1260
28	127	24	61	1766319049	226153980	94	2143295	221064
29	9801	1820	62	63	8	95	39	4
30	11	2	63	8	1	96	49	5
31	1520	273	65	129	16	97	62809633	6377352
32	17	3	66	65	8	98	99	10
33	23	4	67	48842	5967	99	10	1
34	35	6	68	33	4	101	201	20
35	6	1	69	7775	936	102	101	10
37	73	12	70	251	30	103	227528	22419

Tabel 2. Soluţiile fundamentale ale **ecuaţiei Pell pozitive** pentru $D \leq 103$