TEMĂ 3.

1. În interiorul unui pătrat de latură 1 se plasează 2015 suprafeţe poligonale, cu suma ariilor mai mare ca 2014. Arătaţi că cele 2015 suprafeţe au cel puţin un punct comun.

2. Se aleg patru dintre cifrele 1,2,3,4,5,6,7,8,9. Cu cele patru cifre se formează două numere de două cifre, cât mai apropiate posibil şi se notează cu d modulul diferenţei acestora. De exemplu, dacă se aleg $1, 2, 7, 9$, atunci $d = 27 - 19$. Astfel, fiecărui cuadruplet format din 4 cifre distincte i se asociază un număr d. Care este cea mai mare valoare posibilă a lui d?

3. Centrul cercului înscris într-un triunghi este egal depărtat de mijloacele a două dintre laturi. Rezultă că triunghiul este isoscel?

4. În vârfurile şi în mijloacele laturilor unui poligon cu 13 laturi se scriu numerele de la 1 la 26. Se poate face acest lucru astfel încât suma celor trei numere de pe fiecare latură să fie aceeaşi?

5. Fie $S(x)$ suma cifrelor zecimale ale lui x. Există numere naturale a, b, c astfel încât $S(a+b) < 5, \quad S(b+c) < 5, \quad S(c+a) < 5, \quad S(a+b+c) > 50$?

6. Triunghiul $A_1A_2A_3$ are laturile a_1, a_2, a_3 (a_i este latura opusă vârfului A_i). Pentru orice $i \in \{1, 2, 3\}$, M_i este mijlocul laturii a_i, T_i este punctul de tangenţă al cercului înscris în triunghiul $A_1A_2A_3$ cu latura a_i, iar S_i este simetricul lui T_i faţă de bisectoarea unghiului A_i. Demonstraţi că dreptele M_1S_2, M_2S_2, M_3S_3 sunt concurente într-un punct situat pe cercul înscris în triunghiul $A_1A_2A_3$.

7. În triunghiul isoscel ABC, D e mijlocul bazei $[BC]$, E e proiecţia lui D pe AC, iar BE intersectează cercul circumscris triunghiului ABD în punctele B şi F. Dacă $\{G\} = DE \cap AF$, arătaţi că $DG = GE$.

8. Arătaţi că dacă $a, b, c > 0$ verifică $a^3 + b^3 + c^3 = a^4 + b^4 + c^4$, atunci

$$\frac{a}{a^2+b^3+c^3} + \frac{b}{a^3+b^2+c^3} + \frac{c}{a^3+b^3+c^2} \geq 1.$$

9. Demonstraţi că dacă $a, b, c \geq 1$, atunci

$$\min\left(\frac{10a^2-5a+1}{b^2-5b+10}, \frac{10b^2-5b+1}{c^2-5c+10}, \frac{10c^2-5c+1}{a^2-5a+10}\right) \leq abc.$$