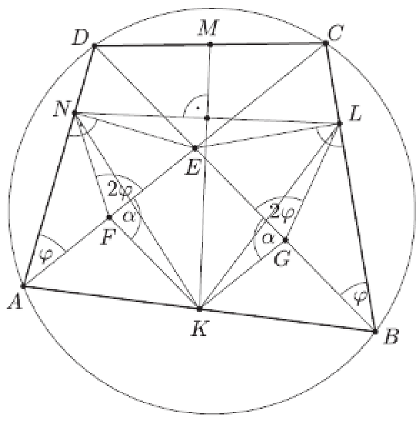
**TEMĂ 1**

**1.** În triunghiul $ABC$, fie $D \in (BC)$ astfel încât $AB + BD = AC + CD$. Demonstraţi că dacă punctele $B$, $C$ şi centrele de greutate ale triunghiurilor $ABD$ şi $ACD$ sunt conciclice, atunci $AB = AC$.
India 2014
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h574134p3379840

**2.** Fie $D$ un punct oarecare pe latura $(BC)$ a unui tiunghi ascuţitunghic $ABC$, $O_1$, $O_2$ centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor $ABD$ şi respectiv $ACD$. Demonstraţi că dreapta care uneşte centrul cercului circumscris triunghiului $ABC$ cu ortocentrul triunghiului $O_1O_2D$ este paralelă cu $BC$.
India 2014
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h574135p3379843

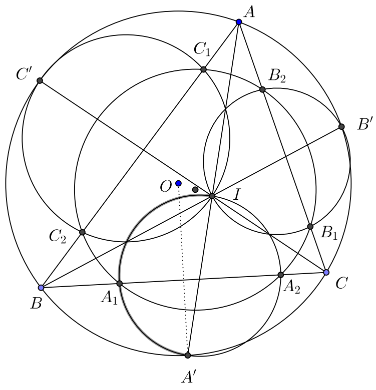
**3.** Fie $E$ punctul de intersecţie a diagonalelor patrulaterului inscriptibil $ABCD$, $K, M$ mijloacele laturilor $(AB)$, respectiv $(CD)$, iar $L, N$ proiecţiiloe lui $E$ pe $BC$, respectiv $DA$. Demonstraţi că $KM$ este perpendicular pe $LN$.
Kvant, KoMaL ian 2014; hint: merge şi cu produs scalar
Dacă $F$, $G$ sunt mijloacele lui $[AE]$, respectiv $[BE]$, se arată uşor că $\Delta KFN \equiv \Delta LGK$ (LUL), deci $K$ este pe mediatoarea lui $[NL]$. Analog pentru $M$, de unde concluzia.

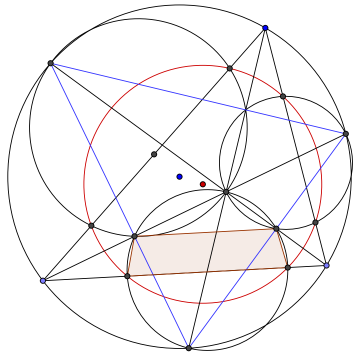



**4.** Fie $ABC$ un triunghi, $D$ piciorul bisectoarei din $A$ şi $E$ piciorul înălţimii din $A$. Mediatoarea lui $[AD]$ intersectează semicercurile de diametre $[AB]$ şi $[AC]$ construite în exteriorul triunghiului $ABC$, în $X$, respectiv $Y$. Demonstraţi că punctele $X, Y, D, E$ sunt conciclice.
Olimpiadă Franţa, 2014

**5.** Fiind date două cercuri exterioare, $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}'$ de centre $O$, respectiv $O'$. Se construiesc razele paralele şi de acelaşi sens $[OM]$ şi $[O'M']$, precum şi razele paralele şi de acelaşi sens $[OP]$ şi $[O'P']$. Dreapta $MM'$ intersectează pentru a doua oară cercul $\mathcal{C}'$ în $N$, iar $PP'$ intersectează din nou cercul $\mathcal{C}'$ în $Q$. Demonstraţi că punctele $M, N, P, Q$ sunt conciclice.
Olimpiadă Franţa, 2014
*Indicaţii:* Mai întâi se arată că $MP||M'P'$, apoi restul rezultă imediat din unghiuri ($m(\angle NQP') = 180° - m(\angle NM'P') = m(\angle PMN)$ şi gata). Paralelismul rezultă din omotetie. Mai pe larg: Dacă $T$ este $OO'$ intersectat cu $MM'$, iar $S$ este $OO'$ intersectat cu $PP'$ rezultă uşor că $S = T$ (Thales cu acelaşi raport, cel al razelor), apoi din cele 2 Thalesuri rezultă prin tranzitivitate că $TM'/TM = TP'/TP$ de unde $MP||M'P'$.

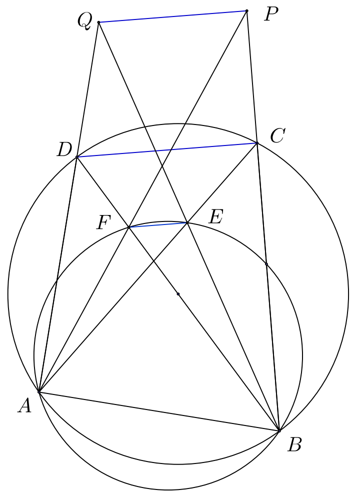
**6.** Fie $ABC$ un triunghi. Bisectoarele unghiurilor $A$, $B$, $C$ intersectează cercul circumscris triunghiului $ABC$ în punctele $A'$, $B'$, respectiv $C'$. Fie $I$ centrul cercului înscris în triunghiul $ABC$. Cercurile de diametre $[A'I]$, $[B'I]$, $[C'I]$ intersectează respectiv dreptele $BC$, $CA$ şi $AB$ în $A_1$ şi $A_2$, $B_1$ şi $B_2$, $C_1$ şi $C_2$. Demonstraţi că punctele $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ sunt conciclice.
Franţa 2014
*Soluţie:* (schiţă) $IA' = CA'$ (se calculează unghiurile de la bază), deci mijlocul $Y$ al lui $[IC]$ se află pe cercul de diametru $[IA']$ (mediana e şi înălţime). Analog, ea aparţine şi cercului de diametru $[IB']$, deci $IC$ este axa radicală a celor două cercuri. Prin urmare puterea lui $C$ faţă de cele două cercuri este aceeaşi. Din reciproca teoremei puterii punctului, $A_1A_2B_1B_2$ este inscriptibil.
*Lemă:* Dacă $[AB]$ e diametru într-un cerc de centru $O$, $[CD]$ este o coardă în acest cerc iar $A', O', B'$ sunt proiecţiile lui $A, O, B$ pe această coardă, atunci $A'O' = O'B'$. Cu această lemă, dacă $A", I'$ sunt proiecţiile lui $A'$ şi $I$ pe coarda $[A_1A_2]$, mediatoarea lui $[A_1A_2]$ coincide cu mediatoarea lui $[A"I']$. Cum $OA'$ este mediatoarea lui $[BC]$, mediatoarea lui $[A"I']$, deci cea a lui $[A_1A_2]$, va intersecta $[OI]$ în mijlocul $K$ al acestuia. La fel, pentru mediatoarea lui $[B_1B_2]$, deci $K$ este centrul cercului circumscris lui $A_1A_2B_1B_2$. De aici concluzia rezultă uşor.

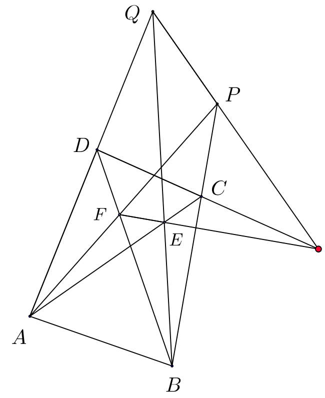


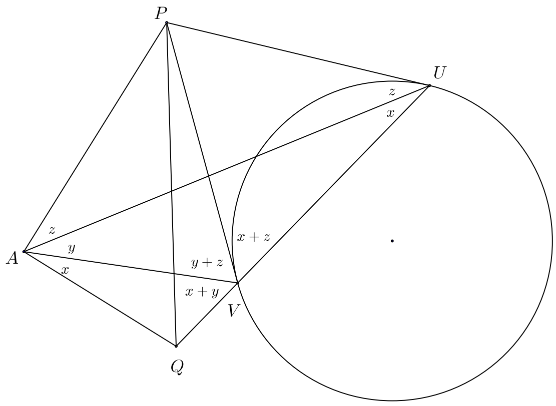
*Alt final:* Fie $A'C' \cap BI = \{X\}$ şi $B'C' \cap IA = \{Z\}$. $A'C'$ e mediatoarea lui $[IB]$, deci $XY$ e linie mijlocie în $\Delta IBC$. Rezultă că $XA_1A_2Y$ e trapez inscriptibil, deci isoscel; atunci $[A_1A_2]$ şi $[XY]$ au aceeaşi mediatoare; ori mediatoarele triunghiului $XYZ$ sunt concurente.
*Observaţie:* Cercul găsit e concentric cu cercul lui Euler al lui $A'B'C'$.

**7.** Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Un cerc care trece prin $A$ şi $B$ intersectează segmentele $[AC]$ şi $[BD]$ în $E$ şi $F$. Dreptele $AF$ şi $BE$ intersectează $[BC]$ şi $[AD]$ în $P$, respectiv $Q$. Demonstraţi că $PQ$ este paralelă cu $CD$.
Franţa 2014
*Indicaţii:* Mai întâi, din unghiuri, $EF \parallel CD$. Ce rămâne e un caz particular al problemei 27043 din GM 3/2014.
O soluţie complicată a celei din GM:
dacă renotăm $A = X$, $B = Y$, $P = Z$ şi $D = X'$, $Q = Y'$, $C = Z'$, teorema lui Pappus spune că intersecţiile dintre $XY'$ şi $X'Y$, adică $F$, dintre $X'Z$ şi $XZ'$, adică $E$ şi intersecţia dintere $YZ'$ şi $Y'Z$ sunt coliniare. Dar acest ultim punct e pe $EF$ şi şi pe $BC$, deci este punctul de la infinit.
În general, după cum se vede din figura din dreapta, dreptele $CD$, $EF$, $PQ$ sunt concurente.




**8.** Din punctul $A$, exterior cercului $\Gamma$, se duc tangentele $[AT]$ şi $[AT']$ la cercul $\Gamma$. Fie $M, M'$ mijloacele segmentelor $[AT]$ şi $[AT']$, iar $P$ un punct de pe dreapta $MM'$. Din $P$ se duc tangentele $PU$, $PV$ la $\Gamma$ ($U, V \in \Gamma$). $UV$ intersectează $MM'$ în $Q$. Arătaţi că triunghiul $PAQ$ este dreptunghic.
Franţa 2014
*Soluţie:* Dacă privim punctul $A$ ca pe un cerc foarte mic, $[AT]$ şi $[AT']$ sunt tangentele comune, deci $MM'$ este axa radicală. Prin urmare punctele $P$ şi $Q$ au aceeaşi putere faţă de cele două cercuri. Rezultă că $PA^2 = PU^2 = PV^2$ şi $QA^2 = QV \cdot QU$, deci triunghiurile $PAU$ şi $PUV$ sunt isoscele, iar triunghiurile $QAV$ şi $QUA$ sunt asemenea. Atunci, cu notaţiile din figură, $m(\angle QAV) = m(\angle QUA) = x$, $m(\angle QAU) = m(\angle QVA) = x + y$, $m(\angle PAU) = m(\angle PUA) = z$, $m(\angle PVU) = m(\angle PUV) = x + z$ şi $m(\angle PVA) = m(\angle PAV) = x + y$. Cum $180° = m(\angle QVA) + m(\angle AVP) + m(\angle PVU) = (x+y)+(y+z)+(z+x)$, rezultă $m(\angle PAQ) = x + y + z = 90°$.



$P$
$U$
$z$
$x$
$z$
$A$
$y$
$x$
$x+z$
$y+z$
$x+y$
$V$
$Q$