TEMĂ 1

1. În triunghiul ABC, fie $D \in (BC)$ astfel încât $AB + BD = AC + CD$. Demonstraţi că dacă punctele B, C şi centrele de greutate ale triunghiurilor ABD şi ACD sunt conciclice, atunci $AB = AC$.

2. Fie D un punct oarecare pe latura (BC) a unui tiunghi ascuţitunghic ABC, O_1, O_2 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABD şi respectiv ACD. Demonstraţi că dreapta care uneşte centrul cercului circumscris triunghiului ABC cu ortocentrul triunghiului O_1O_2D este paralelă cu BC.

3. Fie E punctul de intersecţie a diagonalelor patrulaterului inscriptibil $ABCD$, K, M mijloacele laturilor (AB), respectiv (CD), iar L, N proiecţiiloe lui E pe BC, respectiv DA. Demonstraţi că KM este perpendicular pe LN.

4. Fie ABC un triunghi, D picioarul bisectoarei din A şi E piciorul înălţimii din A. Mediatoarea lui $[AD]$ intersectează semicercurile de diametre $[AB]$ şi $[AC]$ construite în exteriorul triunghiului ABC, în X, respectiv Y. Demonstraţi că punctele X, Y, D, E sunt conciclice.

5. Fiind date două cercuri exterioare, $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}'$ de centre O, respectiv O'. Se construiesc razele paralele şi de acelaşi sens $[OM]$ şi $[O'M']$, precum şi razele paralele şi de acelaşi sens $[OP]$ şi $[O'P']$. Dreapta MM' intersectează pentru a doua oară cercul $\mathcal{C}'$ în N, iar PP' intersectează din nou cercul $\mathcal{C}'$ în Q. Demonstraţi că punctele M, N, P, Q sunt conciclice.

6. Fie ABC un triunghi. Bisectoarele unghiurilor A, B, C intersectează cercul circumscris triunghiului ABC în punctele A', B', respectiv C'. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Cercurile de diametre $[A'I]$, $[B'I]$, $[C'I]$ intersectează respectiv dreptele BC, CA şi AB în A_1 şi A_2, B_1 şi B_2, C_1 şi C_2. Demonstraţi că punctele $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ sunt conciclice.

7. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Un cerc care trece prin A şi B intersectează segmentele $[AC]$ şi $[BD]$ în E şi F. Dreptele AF şi BE intersectează $[BC]$ şi $[AD]$ în P, respectiv Q. Demonstraţi că PQ este paralelă cu CD.

8. Din punctul A, exterior cercului Γ, se duc tangentele $[AT]$ şi $[AT\prime]$ la cercul Γ. Fie $M.M'$ mijloacele segmentelor $[AT]$ şi $[AT\prime]$, iar P un punct de pe dreapta MM'. Din P se duc tangentele PU, PV la Γ $(U, V \in \Gamma)$. UV intersectează MM' în Q. Arătaţi că triunghiul PAQ este dreptunghic.