TEMĂ 2.

1. Fie n un număr natural nenul. Demonstraţi că numerele $\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]$ şi $[\sqrt{n}]$ au aceeaşi paritate.

2. Fie a, b numere reale distincte, nu ambele întregi. Demonstraţi că există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a^n - b^n \notin \mathbb{Z}$.

3. Determinaţi cel mai mic număr real c care are următoarea proprietate:
oricare ar fi n numere reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$, putem alege dintre acestea câteva (minimum unul), astfel încât distanţa dintre suma lor şi cel mai apropiat număr întreg să fie cel mult c.

4. Arătaţi că oricare ar fi 7 dintre vârfurile unul poligon regulat cu 27 de laturi, putem alege 4 dintre ele care să fie vârfurile unui trapez.

5. Determinaţi numerele naturale nenule n pentru care mulţimea $\{1, 2, \ldots, n\}$ poate fi partiţionată în (cel puţin două) submulţimi care au acelaşi număr de elemente şi aceeaşi sumă a elementelor.

6. Într-un oraş sunt trei licee. În fiecare liceu învaţă n elevi. Fiecare elev din fiecare liceu cunoaşte $n + 1$ elevi de la celelalte licee. Demonstraţi că se pot alege trei elevi, câte unul de la fiecare liceu, astfel încât cei trei elevi să se cunoască între ei.

7. Determinaţi numerele întregi a, b care verifică ecuaţia $(a + 1)(b - 1) = a^2b^2$.

8. Demonstraţi că, oricum am alege 90 de numere din mulţimea $\{1, 2, \ldots, 100\}$, există printre ele 10 aflate în progresie aritmetică.

9. Fie $k \geq 1$ un număr întreg. Un operator de telefonie mobilă îi propune fiecărui client k numere cu care comunicarea este gratuită (dacă o persoană A alege numărul lui B, atunci apelurile lui A către B şi cele ale lui B către A sunt gratuite. Considerăm un grup de n persoane.
1) Dacă $n \geq 2k + 2$, demonstraţi că există două persoane care nu pot comunica gratuit.
2) Dacă $n = 2k + 1$, demonstraţi că cele n persoane pot alege numerele gratuite astfel încât să vorbească gratuit între ei.

10. Pe o tablă 5×5 au fost plasaţi n cai (cel mult unul în fiecare pătrăţel) astfel încât fiecare dintre ei atacă exact alţii doi. Care este cea mai mare valoare posiblă a lui n?

11. Fie $n \geqslant 5$ un număr natural. Arătaţi că mulţimea $\{1, 2, \ldots, n\}$ poate fi partiţionată în două submulţimi A şi B astfel încât suma elementelor mulţimii A să fie egală cu produsul elementelor mulţimii B.