COMBINATORICĂ

1. În fiecare din pătrăţelele unitate ale unei table 17×17 se aşază câte o monedă. Toate monedele au banul în sus. O mutare constă în a întoarce cinci monede consecutive de pe aceeaşi diagonală (mare), linie sau coloană. Este posibil să ajungem la situaţia în care toate monedele sunt cu stema în sus?

2. A rectangle formed by the lines of checkered paper is divided into figures of three kinds: isosceles right triangles (1) with base of two units, squares (2) with unit side, and parallelograms (3) formed by two sides and two diagonals of unit squares (figures may be oriented in any way). Prove that the number of figures of the third kind is even. (Zhautykov 2010)

3. La un concurs de şah participă $2n$ concurenţi. În prima rundă se joacă n partide, în runda a doua alte n partide, diferite. Demonstraţi că există n participanţi care n-au jucat între ei dar că nu pot exista $n+1$. (Kvant)

GEOMETRIE

1. Fie C un punct variabil aflat pe semicercul de diametrul $[AB]$ şi D mijlocul arcului AC. Notăm cu E proiecţia punctului D pe dreapta BC, cu F intersecţia dreptei AE cu semicercul $BF \cap DE = \{M\}$ şi cu N mijlocul segmentului $[CD]$. Demonstraţi că dreapta MN trece printr-un punct fix. (Concursul şcolii 97, Bucureşti, 2016)

2. Un punct D este ales în interiorul unui triunghi scalen astfel încât $m(\sphericalangle ADB) = m(\sphericalangle ACB) + 90°$ şi $AC \cdot BD = AD \cdot BC$. Calculaţi $\dfrac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}$. (OIM 1993, ONM 2009)
Demonstraţi că cercurile circumscrise triunghiurilor ACD şi BCD sunt ortogonale.

3. Fie ABC un triunghi, O centrul cercului său circumscris şi I centrul cercului său înscris. Dacă A', B', C' sunt punctele de contact ale cercului înscris cu laturile $[BC]$, $[CA]$, respectiv $[AB]$, iar T este ortocentrul triunghiului $A'B'C'$, demonstraţi că punctele O, I şi T sunt coliniare.

Concursul Kürschák, Ungaria, 1997

Soluţia 1: Fie F intersecţia semidreptei $(AI$ cu cercul circumscris triunghiului ABC şi P proiecţia lui A' pe $B'C'$. Unghiurile $\sphericalangle OFI$ şi $\sphericalangle IA'T$ sunt congruente (au laturile paralele). În plus, este cunoscut (şi rezultă dintr-un simplu calcul de unghiuri) că $IF = BF = 2R\sin\frac{A}{2}$. De asemenea, rezultat folosit şi la problema 1 de la barajul 1, $A'T = 2r\cos(\widehat{B'A'C'})$. Triunghiurile $A'BC'$ şi $A'CB'$ sunt isoscele, deci $m(\sphericalangle C'A'B) = 90° - \frac{1}{2}\,m(\sphericalangle B)$ şi $m(\sphericalangle B'A'C) = 90° - \frac{1}{2}\,m(\sphericalangle C)$, deci

$m(\sphericalangle B'A'C') = 90^\circ - \frac{1}{2}m(\widehat{A})$. Atunci $A'T = 2r\sin\frac{A}{2}$. Deducem că triunghiurile OFI şi $IA'T$ sunt asemenea (LUL): $\sphericalangle OFI \equiv \sphericalangle IA'T$ şi $\dfrac{IF}{TA'} = \dfrac{2R\sin\frac{A}{2}}{2r\sin\frac{A}{2}} = \dfrac{R}{r} = \dfrac{OF}{IA'}$. Aşadar $m(\sphericalangle TIA') = m(\sphericalangle IOF) = 180^\circ - m(\sphericalangle OIA6\prime)$, deci punctele O, I, T sunt coliniare.

Soluţia 2: (Mircea Fianu)

Dacă A_1, B_1, C_1 sunt intersecţiile bisectoarelor din A, B, respectiv C cu cercul circumscris, atunci triunghiurile $A_1B_1C_1$ şi $A'B'C'$ au laturile perpendiculare pe bisectoarele triunghiului ABC, deci au laturile paralele. Sunt aşadar omotetice. I, centrul cercului înscris în triunghiul ABC este ortocentrul $\Delta A'B'C'$ şi centrul cercului circumscris pentru $A_1B_1C_1$. Triunghiurile $A_1B_1C_1$ şi $A'B'C'$ fiind omotetice, dreptele lor Euler sunt paralele sau confundate. Din cele de mai sus rezultă că sunt confundate, deci şi ortocentrul lui $A'B'C'$ se află pe dreapta lui Euler a triunghiului $A_1B_1C_1$. Ori cum O este centrul cercului circumscris iar I este ortocentrul, rezultă că $T \in OI$.