Diviziuni, fascicule, patrulatere armonice

Definiţia 1.

a) O mulţime ordonată (A, B, C, D) de puncte coliniare se numeşte <u>diviziune</u> pe rigla d.

b) O diviziune (A, B, C, D) pentru care $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ se numeşte <u>diviziune armonică</u> pe rigla d.

Teoremă 2 (Caracterizarea unei diviziuni armonice). Dacă (A, B, C, D) este o diviziune pe dreapta d şi M, N mijloacele segmentelor $[CD]$, $[A, B]$ respectiv, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1) $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ (adică diviziunea (A, B, C, D) este armonică).
2) $\overline{BA} \cdot \overline{MB} = \overline{BC} \cdot \overline{BD}$.
3) $MC^2 = \overline{MA} \cdot \overline{MB}$.
4) $\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$.
5) $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \left(\frac{CA}{CB}\right)^2$.
6) $AB^2 + CD^2 = 4 \cdot MN^2$.

Teoremă 3.

a) Dacă (A, B, C, D) este o diviziune armonică pe dreapta d, $C \in (AB)$ şi $P \notin d$ atunci :

$$\cos(\widehat{APB}) \cdot \cos(\widehat{CPD}) = \cos(\widehat{APC} + \widehat{BPD}).$$

b) Dacă (A, B, C, D) este o diviziune pe dreapta d, $C \in (AB)$ şi $P \notin d$, atunci oricare două din propoziţiile următoare o implică pe cea de-a treia:

p : Diviziunea (A, B, C, D) este armonică.

q : $PC \perp PD$.

r : $\widehat{CAD} \equiv \widehat{CPB}$.

Definiţia 4.

a) Dacă punctele A, B, C, D aparţin unei drepte d, $O \notin d$, $C \in (AB)$, $B \in (CD)$, $\measuredangle AOD < 180°$ atunci reuniunea $O(A, B, C, D) = [OA \cup [OB \cup [OC \cup [OD$ se numeşte <u>fascicul concurent</u>.

b) Un fascicul concurent $O(A, B, C, D)$ se numeşte <u>armonic</u> dacă $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ adică punctele C şi D sunt armonic conjugate în raport cu punctele A şi B.

Propoziţia 5. Dacă $\omega = \mathcal{C}(O, r)$ este un cerc $P \notin \omega$, $\{M, N\} \subset \omega$, $P \in MN$ atunci locul geometric al punctului L, conjugatul armonic al lui P în raport cu punctele M şi N, este segmentul $[AB]$ pentru care $\{A, B\} \subset \omega$ şi $P \in AA \cap BB$.

Definiţia 6. Dreapta suport $p = AB$ a acestui loc geometric asociat unui cerc ω şi unui punct $P \notin \omega$ se numeşte <u>polara punctului P în raport cu cercul ω</u> şi punctul P se numeşte <u>polul dreptei p în raport cu cercul ω</u>.

Teorema 7. (Hire) Fie un cerc ω , trei puncte P, Q, R care nu aparţin cercului ω şi p, q, r polarele punctelor P, Q, R în raport cu cercul ω. Atunci:

1) $Q \in p \Leftrightarrow P \in q$.

2) $R \in p \cap q \Leftrightarrow r = PQ$.

Teoremă 8. (Patrulaterul armonic) Fie patrulaterul armonic $ABCD$ (adică un patrulater convex inscriptibil astfel încât $AB \cdot CD = AD \cdot BC$) care nu este trapez şi $S \in AC \cap BD, E \in AA \cap CC, F \in BB \cap DD$. Dacă O este centrul cercului circumscris patrulaterului atunci:

1) $E \in BD$ şi $F \in AC$.

2) Punctul S este piciorul simedianei din vârfurile A, B, C, D în triunghiurile ABD, BCA, CDB, DAC respectiv.

3) Diviziunile (A, C, S, F) şi (B, D, S, E) sunt armonice.

4) **Patrupunctul** $\{E, F, S, O\}$ este ortocentric (adică oricare din cele patru puncte este ortocentrul triunghiului format de celelate trei).

5) (Tucker) S este punctul din interiorul patrulaterului pentru care suma pătratelor distanţelor la laturi este minimă.

Propoziţia 9.

a) Dacă P este un punct nesituat pe dreptele suport ale laturilor triunghiului ABC şi notăm intersecţiile $X \in AP \cap BC$, $Y \in BP \cap CA$, $Z \in CP \cap AB$, $X_1 \in BC \cap YZ$, atunci diviziunea (B, C, X, X_1) este armonică.

b) (Pappus) Într-un patrulater complet $ABCDEF$ (adică un patrulater convex $ABCD$ cu $E \in AB \cap CD$ şi $F \in BC \cap AD$) orice diagonală este împărţită armonic de celelalte două.

c) Dacă P este un punct pe înălţimea din A a triunghiului ABC şi $X \in AP \cap BC$, $Y \in BP \cap CA$, $Z \in CP \cap AB$, $X_1 \in BC \cap YZ$, atunci $\widehat{AXY} \equiv \widehat{AXZ}$.

Propoziţia 10.

a) În orice patrulater $ABCD$ înscris în cercul $\mathcal{C}(O)$ cu $M \in AB \cap CD, N \in BC \cap AD$, $P \in AC \cap BD$, patrupunctul $\{M, N, P, O\}$ este ortocentric.

b) În orice triunghi ABC cu $AB \neq AC$, H ortocentrul, M mijlocul laturii BC şi $E \in BH \cap AC$, $F \in CH \cap AB$, $L \in AM \cap LH$ avem $AM \perp LH$.

Aplicaţii

A1. Punctele de contact ale cercului înscris $\omega = \mathcal{C}(I)$ al triunghiului ABC cu laturile acestuia sunt $D \in BC, E \in CA, F \in AB$ şi $P \in BI \cap EF, Q \in CI \cap EF$. Să se arate că $DP = DQ \Leftrightarrow AB = AC$.

A2. (Donova 2005) Fie AS şi AT tangentele duse din punctul A, exterior cercului $\mathcal{C}(O)$ la cerc, $M \in \mathcal{C}$ diferit de punctele S, T şi intersecţia P a perpendicularei duse din punctul S pe dreapta MO cu dreapta MA. Să se arate că simetricul lui S faţă de punctul P aparţine dreptei MT.

A3. Fie triunghiul ascuţitunghic ABC şi proiecţiile D, E, F ale vîrfurilor A, B, C pe laturile opuse acestora. Notăm $P \in BC \cap EF,\ Q \in AC,\ R \in AB$ astfel încât $D \in RQ$ şi $RQ \parallel EF$ şi mijlocul M al laturii $[BC]$. Să se arate că punctele M, P, R, Q sunt conciclice.

A4. (TST 2004) Cercul $\mathcal{C}(I)$ înscris în triunghiul neisoscel ABC atinge laturile acestuia în punctele $A' \in BC,\ B' \in CA,\ C' \in AB$. Notăm $P \in AA' \cap BB',\ M \in AC \cap A'C',\ N \in BC \cap B'C'$. Să se arate că $PI \perp MN$.

A5. Cercul $\omega = \mathcal{C}(I)$ înscris în triunghiul ABC atinge laturile acestuia în punctele $D \in BC,\ E \in CA,\ F \in AB$. Fie un punct X interior triunghiului dat astfel încât cercul înscris ω_1 triunghiului BXC atinge dreptele $XB,\ XC,\ BC$ în punctele $Z,\ Y,\ D$ respectiv. Să se arate că punctele $E,\ F,\ Y,\ Z$ sunt conciclice.

A6. (Baraj Procopiu) În patrulaterul $ABCD$ notăm $O \in AC \cap BD$ şi presupunem că semidreptele $[BO,\ [DO$ sunt simediane în triunghiurile $ABC,\ ADC$ respectiv. Să se arate că în triunghiul ABD semidreapta $[AO$ este simediană.

A7. (IMO SHL 2005) Mediana $[AM], M \in BC$ taie cercul înscris în triunghiul ABC în punctele K, L. Dreptele paralele cu dreapta BC şi care trec prin punctele K, L taie cercul înscris din nou în punctele X, Y respectiv. Dacă $P \in AX \cap BC, Q \in AY \cap BC$ să se arate că $BP = CQ$.

A8. (IMO SHL 1994) Fie ω cercul de diametru $[XY]$ şi două puncte $\{C, D\} \subset \omega$ pentru care dreapta XY nu separă punctele C şi D. Notăm $B \in XY \cap CC, A \in XY \cap DD, E \in AC \cap BD$ şi proiecţia F a punctului E pe dreapta XY. Să se arate că semidreapta $[FE$ este bisectoarea unghiului $\widehat{CFD}$.

A9. (China 2006) Fie cercul $\omega = \mathcal{C}(O)$ de diametru $[AB]$ şi punctul C astfel încât $B \in AC$. O dreaptă dusă prin C taie cercul ω în punctele D, E, cu $D \in (EC)$. Segmentul OF este diametru în cercul $\omega_1 = \mathcal{C}(O_1)$ circumscris triunghiului BOD iar dreapta CF taie a doua oară cercul ω_1 în punctul G. Să se arate că punctele O, A, E, G sunt conciclice.

A10. (Rusia 2006) Într-un triunghi A-isoscel un cerc ω care este tangent laturilor $(AB), (AC)$ în punctele D, E taie latura (BC) în punctele K, L. Dacă $M \in \omega \cap (KA$ şi P, Q sunt simetricele punctului K faţa de B, C respectiv, să se arate că cercul circumscris triunghiului PMQ este tangent cercului ω.

A11. (Hong Kong 2006) Patrulaterul convex $ABCD$, cu $AC \neq BD, E \in AC \cap BD$ este înscris în cercul $\omega = \mathcal{C}(O)$ şi există un punct P interior patrulaterului astfel încât $\widehat{PAB} + \widehat{PCB} = \widehat{PBC} + \widehat{PDC} = 90°$. Să se arate că $P \in OE$.

prof. Marius Mîinea