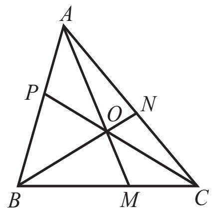
Aplicaţii ale teoremei lui Van Aubel

Omer CERRAHOGLU[1]

Rezultatul asupra căruia ne îndreptăm atenţia în această notă este următorul:

Teoremă (Van Aubel). *Se consideră triunghiul ABC şi trei ceviene AM, BN şi CP, concurente în O; atunci* $\dfrac{AP}{PB}+\dfrac{AN}{NC}=\dfrac{AO}{OM}$.

Demonstraţie. Aplicând teorema lui Menelaus în $\triangle ABM$, cu transversala P-O-C, obţinem $\dfrac{AP}{PB}\cdot\dfrac{BC}{CM}\cdot\dfrac{MO}{OA}=1$, de unde $\dfrac{AP}{PB}=\dfrac{CM}{BC}\cdot\dfrac{AO}{OM}$. Analog se arată că $\dfrac{AN}{NC}=\dfrac{BM}{BC}\cdot\dfrac{AO}{OM}$. Însumând cele două relaţii, deducem că



$$\frac{AP}{PB}+\frac{AN}{NC}=\frac{AO}{OM}\cdot\left(\frac{CM}{BC}+\frac{BM}{BC}\right)=\frac{AO}{OM}\cdot\frac{BC}{BC}=\frac{AO}{OM}.$$

Această teoremă poate fi aplicată în probleme în care apar ceviene concurente şi se cunosc anumite rapoarte sau sume de rapoarte.

Problema 1. *Se consideră triunghiul ABC şi cevienele AM, BN şi CP concurente în O. Arătaţi că $\dfrac{AP}{PB}+\dfrac{AN}{NC}=1$ dacă şi numai dacă $\mathcal{A}_{BOC}=\dfrac{1}{2}\cdot\mathcal{A}_{ABC}$.*

D. Şt. Marinescu, V. Cornea, *Lista scurtă, O.N.M.*, 2008

Soluţie. Cum $\dfrac{\mathcal{A}_{BOC}}{\mathcal{A}_{ABC}}=\dfrac{d(O,BC)}{d(A,BC)}=\dfrac{OM}{AM}$, deducem că $\mathcal{A}_{BOC}=\dfrac{1}{2}\mathcal{A}_{ABC}\Leftrightarrow\dfrac{OM}{AM}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{AO}{OM}=1$. Din teorema lui Van Aubel, obţinem că $\dfrac{AO}{OM}=1\Leftrightarrow\dfrac{AP}{PB}+\dfrac{AN}{NC}=1$, ceea ce încheie soluţia problemei.

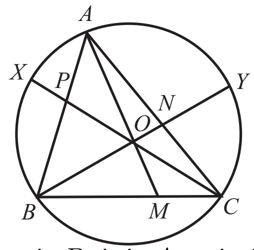
Problema 2. *Se consideră triunghiul ascuţitunghic ABC, cu laturi de lungimi diferite. Fie $M\in(BC)$, $O\in(AM)$, iar X şi Y punctele în care CO, respectiv BO, intersectează a doua oară cercul circumscris triunghiului. Dacă $\dfrac{AX}{BX}+\dfrac{AY}{CY}=\dfrac{AO}{OM}$, arătaţi că latura BC este cea de lungime mijlocie.*

Omer Cerrahoglu

Soluţie. Notăm $\{N\}=BY\cap AC$, $\{P\}=CX\cap AB$. Observăm că $\dfrac{AX}{BX}=\dfrac{AX\cdot XP\cdot\sin\widehat{AXC}}{BX\cdot XP\cdot\sin\widehat{BXC}}\cdot\dfrac{\sin\widehat{BXC}}{\sin\widehat{AXC}}=\dfrac{2\cdot\mathcal{A}_{AXP}}{2\cdot\mathcal{A}_{BXP}}\cdot\dfrac{\sin A}{\sin B}=\dfrac{d(X,AB)\cdot AP}{d(X,AB)\cdot BP}\cdot\dfrac{\sin A}{\sin B}$, prin urmare $\dfrac{AX}{XB}=\dfrac{AP}{BP}\cdot\dfrac{\sin A}{\sin B}$. Analog se arată că $\dfrac{AY}{YC}=\dfrac{AN}{CN}\cdot\dfrac{\sin A}{\sin C}$. Ţinând seama de

[1]Elev, cl. a VII-a, Colegiul Naţional "Vasile Lucaciu", Baia Mare

ipoteza problemei şi de teorema lui Van Aubel, obţinem că



$$(*)\qquad \frac{AP}{PB}+\frac{AN}{NC}=\frac{AP}{PB}\cdot\frac{\sin A}{\sin B}+\frac{AN}{NC}\cdot\frac{\sin A}{\sin C},$$

ambii membri ai acestei identităţi fiind egali cu $\dfrac{AO}{OM}$. Pentru a arăta că BC este latura de lungime mijlocie, ar fi suficient să demonstrăm că $A\neq\min\{A,B,C\}$ şi $A\neq\max\{A,B,C\}$. Presupunem, prin absurd, că $A=\min\{A,B,C\}$; atunci $\sin A<\sin B$ şi $\sin A<\sin C$, deci $\dfrac{AP}{PB}\cdot\dfrac{\sin A}{\sin B}<\dfrac{AP}{PB}$ şi $\dfrac{AN}{NC}\cdot\dfrac{\sin A}{\sin C}<\dfrac{AN}{NC}$, în contradicţie cu relaţia $(*)$. Analog se arată că $A\neq\max\{A,B,C\}$ şi astfel problema este rezolvată.

Problema 3. *Fie I centrul cercului înscris în $\triangle ABC$, $\{A'\}=AI\cap BC$, $\{B'\}=BI\cap AC$, $\{C'\}=CI\cap AB$. Arătaţi că $\dfrac{1}{4}<\dfrac{AI\cdot BI\cdot CI}{AA'\cdot BB'\cdot CC'}\leq\dfrac{8}{27}$. (O.I.M., 1991)*[1].

Soluţie. Folosind teorema lui Van Aubel şi teorema bisectoarei, obţinem că

$$\frac{AI}{IA'}=\frac{AC'}{BC'}+\frac{AB'}{CB'}=\frac{AB}{BC}+\frac{AC}{BC}=\frac{AB+AC}{BC}\Rightarrow\frac{AI}{AA'}=\frac{AB+AC}{AB+AC+BC}.$$

Scriind încă două relaţii analoage şi folosind notaţiile uzuale într-un triunghi, inegalitatea din enunţ, devine

$$\frac{1}{4}<\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(2p)^3}\leq\frac{8}{27}.$$

Pentru a demonstra inegalitatea din dreapta, folosim inegalitatea mediilor:

$$\frac{a+b}{2p}\cdot\frac{b+c}{2p}\cdot\frac{c+a}{2p}\leq\left[\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{a+b}{2p}+\frac{b+c}{2p}+\frac{c+a}{2p}\right)\right]^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27},$$

cu egalitate în cazul triunghiului echilateral. Pentru a demonstra inegalitatea din stânga, folosim inegalitatea lui Bernoulli generalizată:

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{2p}\cdot\frac{b+c}{2p}\cdot\frac{c+a}{2p}&=\frac{1}{8}\left(1+\frac{p-c}{p}\right)\left(1+\frac{p-a}{p}\right)\left(1+\frac{p-b}{p}\right)\\&>\frac{1}{8}\left(1+\frac{p-c}{p}+\frac{p-a}{p}+\frac{p-b}{p}\right)=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Încheiem prin a propune spre rezolvare, celor interesaţi, două probleme.

Problema 4. *Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ şi fie $\{O\}=AC\cap BD$, M mijlocul lui $[AO]$, N mijlocul lui $[CO]$, $\{R\}=DM\cap AB$, $\{P\}=DN\cap BC$. Dacă $\dfrac{AR}{RB}+\dfrac{CP}{PB}=1$, demonstraţi că $ABCD$ este paralelogram.*

Omer Cerrahoglu

Problema 5. *Se consideră triunghul ascuţiunghic ABC, înscris în cercul $\mathcal{C}$. Bisectoarea unghiului $\widehat{A}$ intersectează $\mathcal{C}$ în S, iar perpendiculara din S pe BC intersectează a doua oară $\mathcal{C}$ în R. Fie M mijlocul lui $[RS]$, $\{P\}=CM\cap AB$, şi $\{Q\}=BM\cap AC$. Dacă $\dfrac{AP}{PB}+\dfrac{AQ}{QC}=\dfrac{1}{\cos A}$, demonstraţi că $AB=AC$.*

Omer Cerrahoglu

[1]N.R. Prin problema L36 din RecMat 1/2003, *M. Ionescu* generalizează acest rezultat, considerând I ca fiind punct arbitrar în interiorul sau pe laturile triunghiului median al $\triangle ABC$.