Prof. *Mihai Miculița*, ORADEA.

PATRULATERE INSCRIPTIBILE
(şi câteva teoreme în plus…)

Definiția 1. Patru sau mai multe puncte care se găsesc pe un acelaşi cerc, se numesc *puncte conciclice*.

Definiția 2. Se numeşte *patrulater inscriptibil*, un patrulater ale cărui vârfuri sunt patru puncte conciclice.

Proprietățile patrulaterelor inscriptibile:

1). *Un patrulater este inscriptibil*, *atunci şi numai atunci când*, *două unghiuri opuse ale sale sunt suplementare*(v. Fig.1,a).

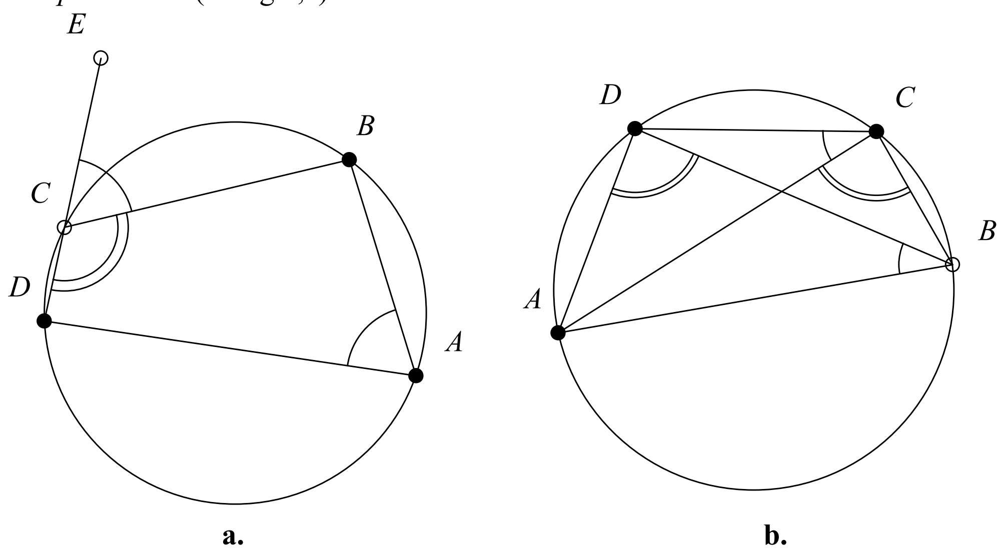

Fig.1

2). *Un patrulater este inscriptibil*, *atunci şi numai atunci*, *când un unghi format de o diagonală cu latură a sa este congruent cu unghiul format de latura opusă cu cealaltă diagonală* (v. Fig.1,b).

Consecințe:

i. Un patrulater care are două unghiuri opuse drepte este un patrulater inscriptibil.

ii. Un patrulater este inscriptibil, atunci şi numai atunci când, un unghi interior al său este congruent cu unghiul exterior opus.

iii. Un trapez isoscel este inscriptibil.

Aplicația 1. (i): *Arătați că simetricele ortocentrului unui triunghi, față de o laturile triunghiului, se găsesc pe cercul circumscris triunghiului.*

(ii): *Arătați că simetricele ortocentrului unui triunghi, față de mijloacele laturilor triunghiului, se găsesc pe cercul circumscris triunghiului.*

Soluție: Fie ABC un triunghi oarecare, H ortocentrul, iar H_a, H_b şi H_c picioarele înălțimilor sale. Notăm cu S_a –simetricul lui H față de latura BC şi cu N_a–simetricul lui H față de mijlocul M_a al laturii [BC]. Va trebui să arătăm că patrulaterele ABS_aC şi ABN_aC sunt inscriptibile (v.fig.2).

(i): Dreapta BC fiind axa de simetrie a punctelor H şi S_a, triunghiul HS_aC este isoscel cu vârful în C, aşa că avem: $\angle HS_aC \equiv \angle S_aHC$. (1)

Pe de altă parte, întrucât:

$$\left.\begin{aligned} AH_a \perp BC \Rightarrow m(\angle HH_aB) = 90^0 \\ AH_c \perp AB \Rightarrow m(\angle AH_cH) = 90^0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \angle HH_aB \equiv \angle AH_cH$$

$$\Rightarrow HH_cBH_a - inscriptibil \Rightarrow \angle S_aHC \equiv \angle ABC. \qquad (2)$$

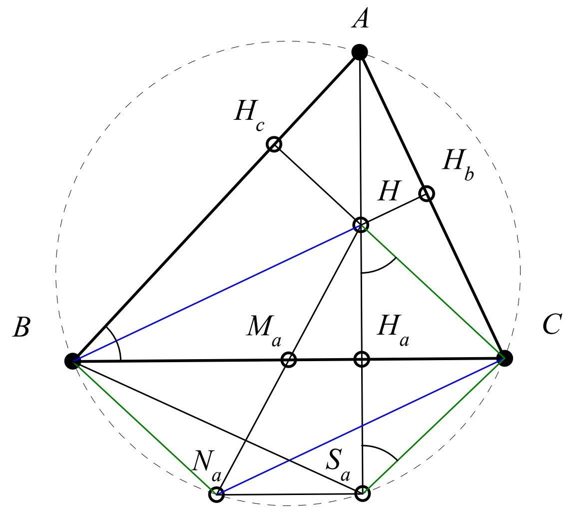

Fig.2.

În fine, din relațiile (1) și (2) urmează că:

$$\angle HS_aC \equiv \angle ABC \Rightarrow ABS_aC - inscriptibil. \blacksquare$$

(ii): Avem,

$$\left.\begin{aligned} |M_aB| = |M_aC| \\ |HM_a| = |M_aN_a| \end{aligned}\right\} \Rightarrow HBN_aC - paralelogram \Rightarrow \begin{cases} N_aC \parallel BH; & (1) \\ N_aB \parallel CH. & (2) \end{cases}$$

Așa că:

$$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} N_aC \parallel BH \\ BH \perp AC \end{aligned}\right\} \Rightarrow N_aC \perp AC \Rightarrow m(\angle N_aCA) = 90^0 \\ &\left.\begin{aligned} N_aB \parallel CH \\ CH \perp AB \end{aligned}\right\} \Rightarrow N_aB \perp AB \Rightarrow m(\angle N_aBA) = 90^0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow ABN_aC - inscriptibil. \blacksquare$$

Observație: Patrulaterul BN_aS_aC este un trapez isoscel! (**Justificați**!)

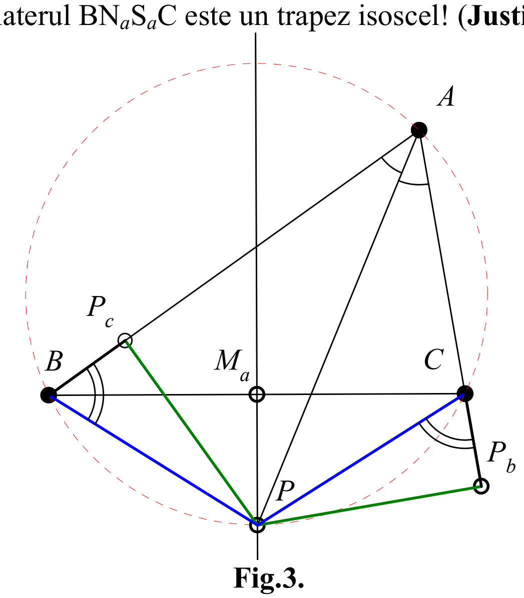

Fig.3.

Prof. *Mihai Miculița*, ORADEA.

Aplicația 2.

Fie ABC *un triunghi oarecare. Notăm cu* P *punctual de intersecție al mediatoarei laturii* [BC] *cu bisectoarea unghiului* ∠BAC (*opus laturii* [BC]). *Demonstrați că punctul* P *se găseşte pe cercul circumscris triunghiului* ABC.

Soluție: Notăm cu M_a-mijlocul laturii [BC] şi cu P_b şi P_c proiecțiile punctului P pe dreptele suport ale laturilor [AC] şi respective [AC] (v. fig.3).

Punctul P aparținând mediatoarei laturii [BC] $\Rightarrow |PB| = |PC|$. (1)

Punctul P apațінînd bisectoarei unghiului $\angle BAC \Rightarrow |PP_c| = |PP_b|$. (2)

Pe de altă parte, pe baza relațiilor (1) şi (2), avem:

$$\Delta PP_cB \equiv \Delta PP_bC(I.C.) \Rightarrow \angle ABP \equiv \angle PCP_b \Rightarrow ABPC - inscriptibil. \ \blacksquare$$

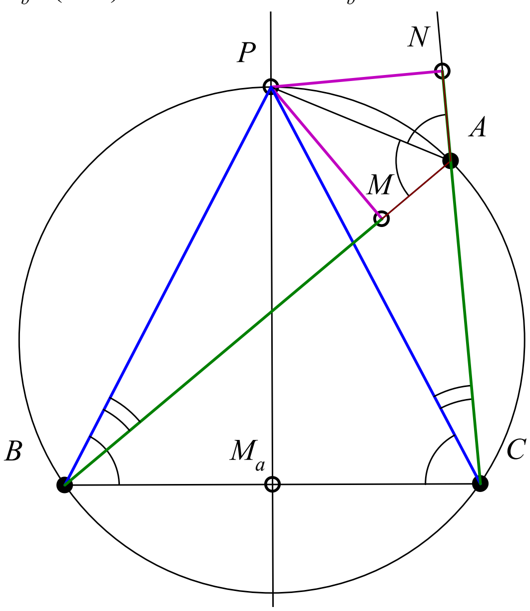

Fig.4.

Aplicația 3.

Fie ABC *un triunghi în care* |AB|>|AC| *şi fie* P *acel punct se intersecție al mediatoarei laturii* [BC] *cu cercul circumscris triunghiului* ABC, *care se găseşte de aceeaşi parte a dreptei* BC *cu punctul* A(v. fig.4). *Notăm cu* M *proiecția punctului* P *pe latura* [AC]. *Demonstrați că are loc relația*: |BM|=|MA|+|AC| (cu alte cuvinte, punctul M înjumătățeşte linia frântă BAC).

Paternitatea acestei probleme îi aparține lui ARHIMEDE (din *Siracuza*).

Soluție: P-fiind un punct al mediatoarei laturii [BC] $\Rightarrow |PB| = |PC|$. (1)

Pe de altă parte,

$$APBC - inscriptibil \Rightarrow \begin{cases} \angle PAN \equiv \angle PBC; & (2) \\ \angle BCP \equiv \angle BAP; & (3) \\ \angle PBM \equiv \angle PCN. & (4) \end{cases}$$

Aşa că din relațiile (1) şi (4), urmează acum:

$$\Delta ABM \equiv \Delta PCN(I.U.) \Rightarrow |BM| = |CN|. \quad (5)$$

Pe de altă parte, ținând seama de (1), obținem: $\angle PBC \equiv \angle BCP$. (6)

Din relațiile: (2), (6) şi (3) $\Rightarrow \angle PAN \equiv \angle BAP \Rightarrow [AP -$ este bisectoarea unghiului ∠NAB $\Rightarrow |AN| = |AM|$. (7)

În fine, din relațiile (5) şi (7), urmează că avem:

$$|BM| = |CN| = |CA| + |AN| = |CA| + |AM|. \ \blacksquare$$

Definiția 3. Triunghiul determinat de mijloacele laturilor unui triunghi, poartă numele de *triunghi median* (sau de *triunghi complementar*) al triunghiului dat.

Aplicația 4.
Demonstrați că picioarele înălțimilor unui triunghi ABC, se găsesc pe cercul circumscris triunghiului median.

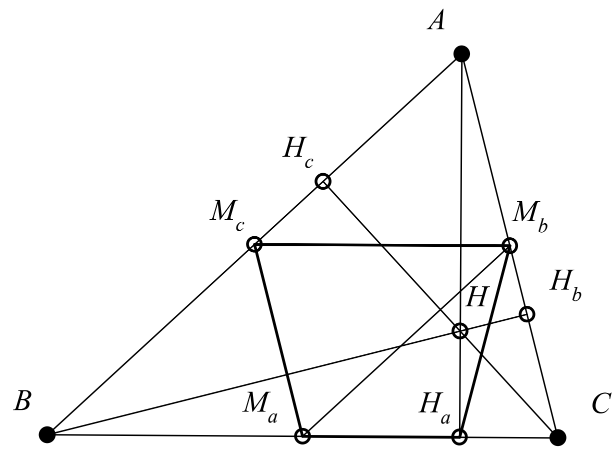

Fig.5.

Soluție. Notăm cu H_a, H_b şi H_c picioarele înălțimilor, iar cu M_a, M_b şi cu M_c mijloacele laturilor [BC], [CA] şi respective [AB]. În acest caz $\Delta M_aM_bM_c$-este triunghiul median al ΔABC. (v. fig.5). Voi arăta că patrulaterul $M_bM_cM_aH_a$-este un trapez isoscel!

1. Segmentele $[M_aM_c]$ şi $[M_aM_b]$ –fiind linii mijlocii în triunghiul ABC, avem:

$$M_bM_c \parallel BC \Rightarrow M_bM_cM_aH_a - trapez \qquad (1)$$

$$\text{şi } |M_cM_a| = |M_cM_a| = \frac{1}{2}.|AC. \qquad (2)$$

2. Pe de altă parte, $[H_aM_b]$-fiind mediană în ΔAH_aC, dreptunghic în H_a, avem:

$$|H_aM_b| = \frac{1}{2}.|AC|. \qquad (3)$$

Din relațiile (2) şi (3), rezută: $|M_cM_a| = |H_aM_b|$. (4)

În fine, din relațiile (1) şi (4), urmează că patrulaterul $M_bM_cM_aH_a$-este un trapez isoscel.

Aşa că piciorul H_a al înălțimii duse din vârful A al triunghiului ABC se găseşte pe cercul circumscris triunghiului median ($\Delta M_aM_bM_c$).

În mod analog se arată că punctele H_b şi H_c se găsesc pe cercul circumscris triunghiului $\Delta M_aM_bM_c$.■

Definiția 3. Cercul circumscris triunghiului median al triunghiului ABC, poartă numele de *triunghiul lui Euler* (sau de "*cercul celor 9 puncte*"([1])) al triunghiului ABC. Mijloacele E_a, E_b şi E_c ale segmentelor [HA], [HB] şi respective [HC], poartă numele de puncte euleriene ale înălțimilor triunghiului ABC.

Observație: Triunghiul median ($\Delta M_aM_bM_c$) şi triunghiul ortic ($\Delta H_aH_bH_c$) sunt două triunghiuri, înscrise în acelaşi cerc (în cercul lui Euler al triunghiului ABC).

Problemă propusă: 1. *Demonstrați că punctele euleriene ale înălțimilor unui triunghi se găsesc pe cercul lui Euler al triunghiului.*

---

[1] Problema propusă care urmmează, dă o justificare acestei denumiri; iar denumirea de cerc al lui Euler, vine de la numele marelui matematician elvețian LEONHARD EULER(1707-1783).

INDICAȚIE: Observați că triunghiurile HBC, HAC, HAB şi ABC au acelaşi triunghi ortic, în timp ce triunghiurile lor mediane sunt: $\Delta E_b M_a E_c$, $\Delta E_a M_b E_c$, $\Delta E_a M_c E_b$ şi respectiv $\Delta M_a M_b M_c$. [2] (v.Fig.6).

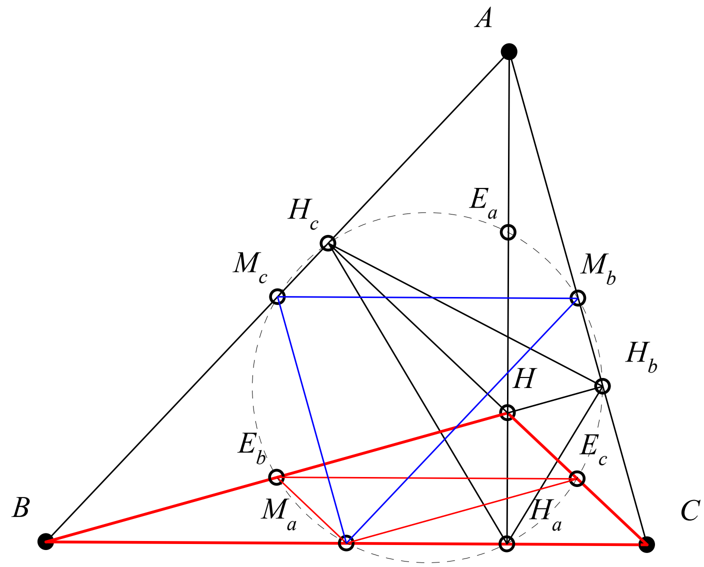

Fig.6.

Aplicația 5.

Fie ABC *un triunghi oarecare, iar* D, E *şi* F *câte un punct arbitrar al dreptelor suport ale laturilor* [BC], [CA] *şi respectiv* [AB]. *Demonstrați că cercurile circumscrise triunghiurilor* AEF, BDF *şi* CDE *au un punct comun.*

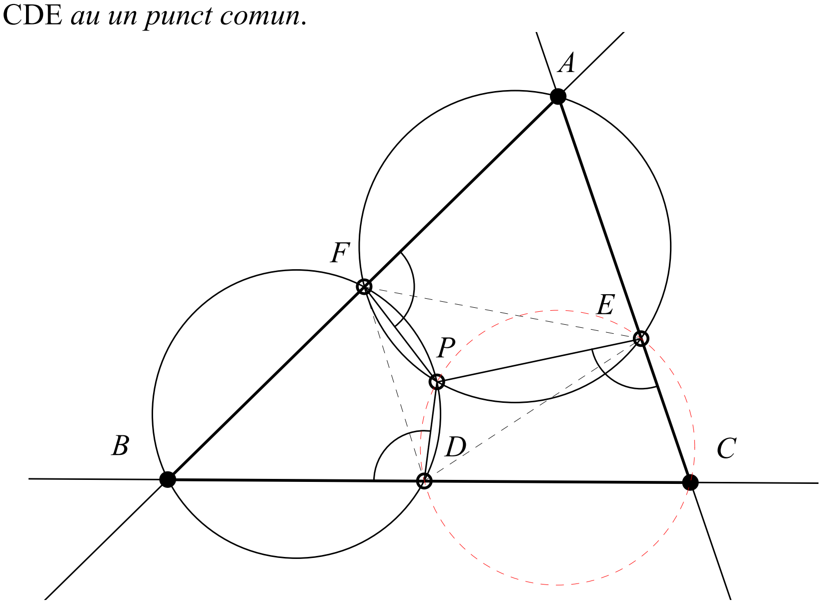

Fig.7.

Soluție: Notăm cu P cel de al doilea punct de intersecție al cercurilor circumscrise triunghiurilor AEF şi BDF (v. fig.7). Avem:

$$\left.\begin{array}{l} AFPE - inscriptibil \Rightarrow \angle PEC \equiv \angle AFP \\ FBDP - inscriptibil \Rightarrow \angle AFP \equiv \angle BDP \end{array}\right\} \Rightarrow \angle PEC \equiv \angle BDP \Rightarrow CEPD - inscriptibil. \blacksquare$$

---

[2] Cercul lui Euler al triunghiului ABC, conține următoarele 9 puncte: picioarele înălțimilor H_a, H_b, H_c, mijloacele laturilor M_a, M_b, M_c şi punctele lui Euler ale înălțimilor, punctele E_a, E_b şi E_c.

Prof. *Mihai Miculița*, ORADEA.

Problemă propusă: 2. *Fie* ABCD *un patrulater care nu are laturi paralele şi să notăm cu* $\{E\} = AB \cap CD$ *şi cu* $\{F\} = AD \cap BC$. Arătaţi că cercurile circumscrise triunghiurilor ABF, CDF, ADE *şi* BCE *au un punct comun* M. (v. fig.8)

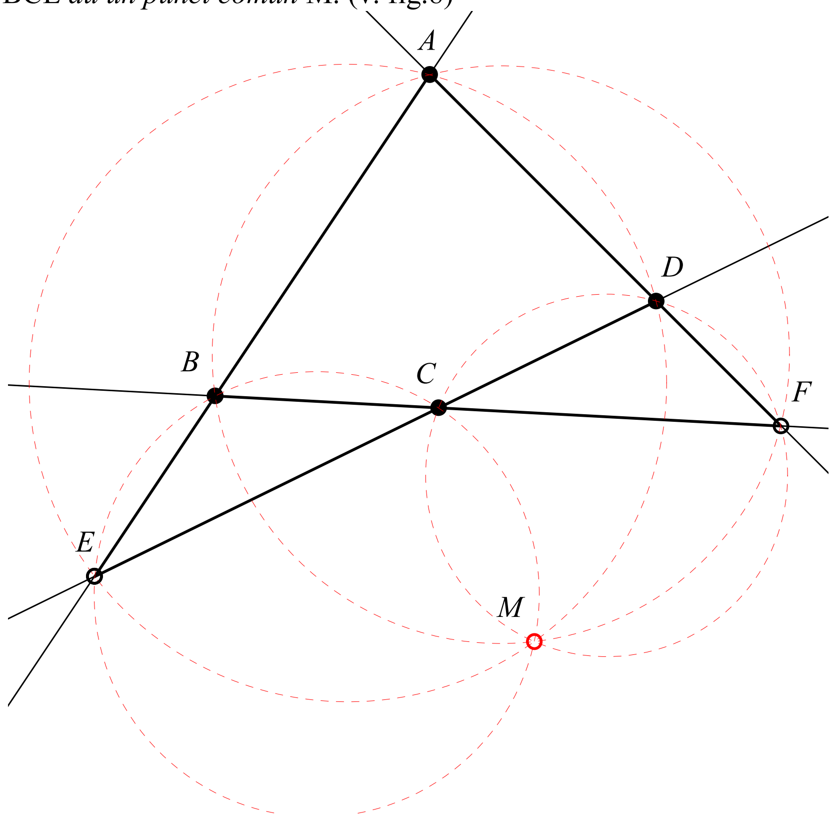

Fig.8.

INDICAȚIE: Se foloseşte aplicaţia 5 în cazul triunghiului ΔAED şi punctele $B \in AE, C \in DE$ şi $F \in AD$; apoi în cazul ΔABF şi a punctelor D, E şi C de pe laturile sale.

Definiţia 4. Fiind date patru drepte care sunt concurente, două câte două, şi oricare 3 să nu treacă prin acelaşi punct. Figura formată de aceste patru drepte poartă numele de *patrulater complet*.

De exemplu: dreptele AB, BC, CD şi AD(din fig.8) sunt patru astfel de drepte, care formează un patrulater complet. Punctele lor de intersecţie, punctele A, B, C, D, E şi F poartă numele de vârfurile patrulaterului; iar dreptele AB, BC, CD şi AD se numesc laturile patrulaterului complet ABCDEF(citim vârfurile lui); iar triunghiurile ΔABF, ΔCDF, ΔADE şi ΔBCE determinate de câte 3 dintre cele 4 drepte, poartă numele de triunghiurile patrulaterului.

Cu alte cuvinte, am putea reformula rezultatul aplicatiei 5, astfel: *Cercurile circumscrise celor 4 triunghiuri ale unui patrulater complet, au un punct comun* M, numit *punctul lui Miquel* al patrulaterului.

Prof. *Mihai Miculița*, ORADEA.

Aplicația 6.

Pe laturile unui triunghi ABC, *în care nici un unghi nu depăşeşte* 120^0, *se construiesc în spre exteriorul triunghiului, triunghiurile echilaterale* BCD, ACE *şi* ABF. *Demonstrați că*:

a). *Cercurile circumscrise triunghiurilor* BCD, ACE şi ABF *au un punct comun* T *şi*

$$m(\angle BTC) = m(\angle ATC) = m(\angle ATB) = 120^0;$$

b). *Dreptele* AD; BE *şi* CF *sunt concurente în punctul* T;

c). |AD|=|BE|=|CF|.

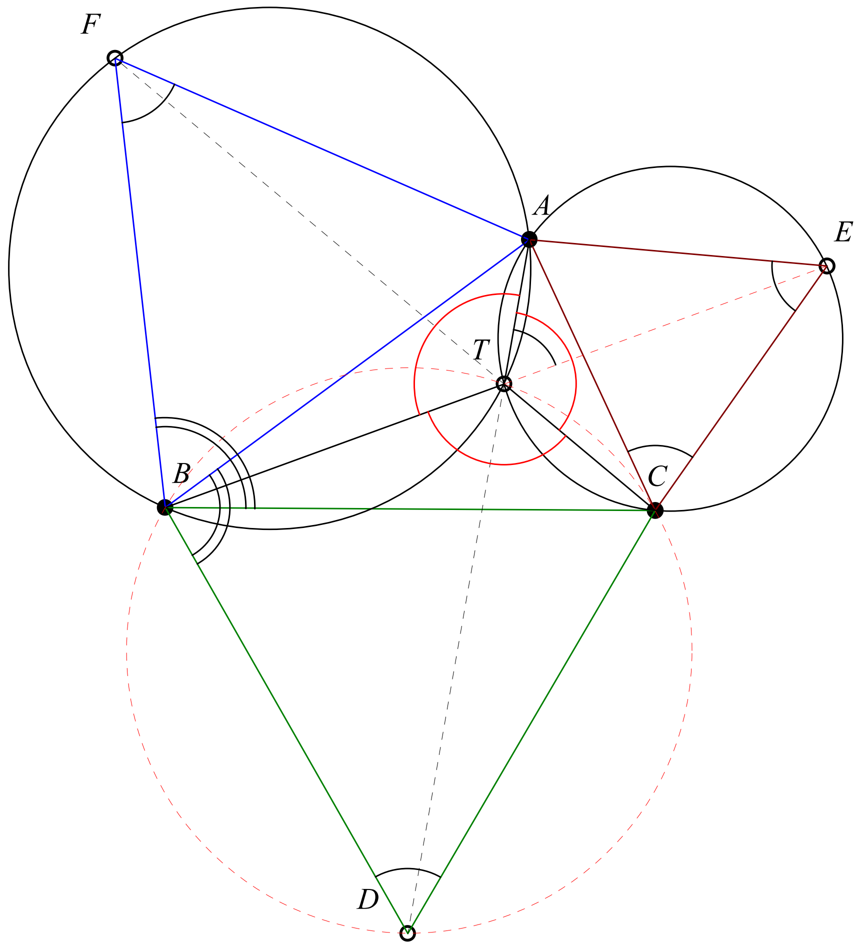

Fig.9.

Soluție: Notăm cu T cel de al doilea punct de intersecție al cercurilor circumscrise triunghiurilor ABF şi ACE (v. fig.9).

a).

$$\left.\begin{array}{r} AFBT - inscriptibil \Rightarrow m(\angle ATB) = 180^0 - m(\angle AFB) \\ \Delta ABF - echilateral \Rightarrow m(\angle AFB) = 60^0 \end{array}\right\} \Rightarrow m(\angle ATB) = 120^0. \qquad (2)$$

În mod analog, se arată că: $m(\angle ATC) = 120^0.$ (2)

Aşa că, din (1) şi (2), rezultă:

$$m(\angle BTC) = 360^0 - [m(\angle ATB) + m(\angle ATC)] = 360^0 - (120^0 + 120^0) = 120^0. \qquad (3)$$

În fine,

$$\left.\begin{array}{r} m(\angle BTC) = 120^0 \quad (3) \\ \Delta BDC - echilateral \Rightarrow m(\angle BDC) = 60^0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(\angle BTC) + m(\angle BDC) = 180^0 \Rightarrow BDCT - inscriptibil. \blacksquare$$

b).

$$\left.\begin{array}{r} m(\angle ATB)=120^0 \quad (1) \\ \left.\begin{array}{r} ATCE-inscriptibil \Rightarrow \angle ATE \equiv \angle ACE \\ \Delta ACE-echilateral \Rightarrow m(\angle\angle ACE)=60^0 \end{array}\right\} \Rightarrow m(\angle ATE)=60^0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(\angle ATB)+m(\angle ATE)=120^0 \Rightarrow T \in [BE].$$

În mod analog se arată că $T \in [AD];[CF]$.

c). Avem:

$$\left.\begin{array}{r} \Delta AFB-echilateral \Rightarrow |BF|=|AB| \\ \Delta BDC-echilateral \Rightarrow |BC|=|BD| \\ m(\angle FBC)=m(\angle ABD)=m(\angle ABC)+60^0 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta FBC \equiv \Delta ABD(L.U.L.) \Rightarrow |FC|=|AD|.$$

În mod analog se demonstrează că: |AD|=|BE|.■

Definiția 5. Punctul T din planul triunghiului ABC, având proprietatea:

$$m(\angle BTC)=m(\angle ATC)=m(\angle ATB)=120^0;$$

poartă numele de *centru izogon*([3]) al triunghiului ABC.

Definiția 6. Două semidrepte [AP și [BP simetrice față de bisectoarea unghiului $\angle BAC$, spunem că sunt *semidrepte izogonale în unghiul* $\angle BAC$.(v. fig.10)

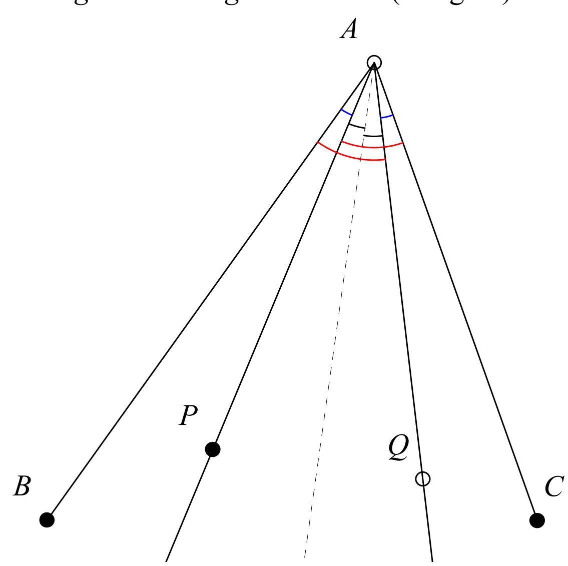

Fig.10.

Observație: Să observăm că în cazul în care semidreptele [AP și [BP izogonale în unghiul $\angle BAC$, au loc și următoarele relații unghiulare:

$$\angle BAP \equiv \angle CAQ \quad \text{şi} \quad \angle PAC \equiv \angle BAQ.$$

[3] Pentru punctul T se mai folosesc și denumirile de *punctul lui Torricelli* sau de *punctul lui Fermat*(în cinstea, celor 2 matematicieni).

Prof. *Mihai Miculița*, ORADEA.

Aplicația 7.

Fie [AP *şi* [BP *două semidrepte izogonale în unghiul* $\angle BAC$. *Notăm cu* P_b *şi* P_c *proiecțiile punctului* P *pe dreptele* AC *şi* AC; *iar cu* Q_b *şi* Q_c *proiecțiile punctului* Q *pe aceleaşi drepte* (v. fig.11). *Arătați că*:

(i). *punctele* P_b, P_c, Q_b *şi* Q_c *sunt patru puncte conciclice*;

(ii). *are loc relația*: $|PP_b|.|QQ_b|=|PP_c|.|QQ_c|$.

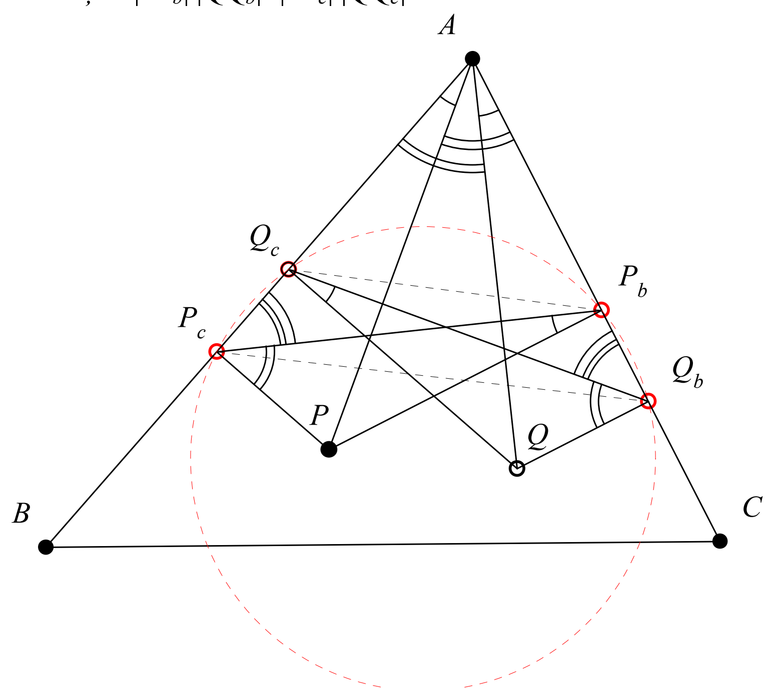

Fig.11.

Soluție: Semidreptele [AP şi [BP fiind izogonale în unghiul $\angle BAC$, au loc şi următoarele relații unghiulare: $\angle BAP \equiv \angle CAQ$ şi $\angle PAC \equiv \angle BAQ$. (1).

Pe de altă parte, avem:

$$m(\angle AP_cB) = m(\angle AP_bC) = 90^0 \Rightarrow AP_cPP_b - inscriptibil \Rightarrow \begin{cases} \angle P_cAP \equiv \angle P_cP_bP; & (2) \\ \angle P_bP_cP \equiv \angle P_bAP. & (3) \end{cases}$$

În mod analog se arată că:

$$(4) \qquad \angle Q_cAQ \equiv \angle Q_cQ_bQ \quad \text{şi} \quad \angle Q_bQ_cQ \equiv \angle Q_bAQ. \qquad (5)$$

(i). Din relațiile (1), (3) şi (4), urmează că, avem:

$$\angle P_bP_cP \equiv \angle Q_cQ_bQ \quad (6) \Rightarrow m(\angle Q_cP_cP_b) = 90^0 - m(\angle P_bP_cP) = 90^0 - m(\angle Q_cQ_bQ) = m(\angle P_bQ_bQ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle Q_cP_cP_b \equiv \angle P_bQ_bQ \Rightarrow Q_cP_cQ_bP_b - inscriptibil \Rightarrow$$ P_b, P_c, Q_b şi Q_c sunt conciclice.■

(ii). Din relațiile (1), (2) şi (5), rezultă că: $\angle P_cP_bP \equiv \angle Q_bQ_cQ$. (7)

În fine, din relațiile (6) şi (7),

$$\Delta P_bP_cP \sim \Delta Q_cQ_bQ \Rightarrow \frac{|PP_b|}{|QQ_c|} = \frac{|PP_c|}{|QQ_b|} \Rightarrow |PP_b|.|QQ_b| = |PP_c|.|QQ_c|.■$$

Prof. *Mihai Miculița*, ORADEA.

Probleme propuse:

3. *Formulați şi demonstrați reciproca proprietății* (ii) *a aplicației* 7.

4. *Fie* ABC *un triunghi oarecare şi* P *un punct din planul triunghiului*. *Să se arate că*:

(i). *În cazul în care punctul* P *nu se găseşte pe cercul circumscris triunghiului*, *izogonalele semidreptelor* [AP, [BP *şi* [CP *față de unghiurile corespunzătoare ale triunghiului* ABC, *sunt concurente într-un punct* Q.

(ii). *În cazul în care punctual* P *se găseşte pe cercul circumscris triunghiului* ABC, *izogonalele semidreptelor* [AP, [BP *şi* [CP *sunt paralele*.

INDICAȚIE: La rezolvare punctului (i) se poate folosi relatia care face obiectul punctului (ii) al aplicatiei 7 şi reciproca acesteia.

Definiția 7. Punctul Q a cărui existență face obiectul punctului (i) a problemei propuse 3, poartă numele de *izogonalul punctului* P *față de triunghiul* ABC.

Problemă propusă:

5. Fie P şi Q două puncte izogonale față de triunghiul ABC(v. def.7). Notăm cu P_a, P_b şi P_c proiecțiile punctului P pe dreptele BC, CA şi AB, iar cu Q_a, Q_b şi Q_c proiecțiile punctului Q pe aceleaşi dreptele. Arătați că punctele P_a, Q_a, P_b, Q_b, P_c şi Q_c sunt şase puncte conciclice.

INDICAȚIE: Folosiți aplicatia 7.

Definiția 8. Cercul care conține punctele P_a, Q_a, P_b, Q_b, P_c şi Q_c, care face obiectul problemei propuse 5, poartă numele de *cercul celor şase puncte al punctelor izogonale* P *şi* Q.

Probleme propuse:

6. *Arătați că*:

a). *ortocentrul* H *şi centrul* O *al cercului circumscris unui triunghi* ABC, *sunt două puncte izogonale*.

b). *cercul lui* EULER *al unui triunghi oarecare*, *este cercul celor şase puncte al punctelor izogonale* H *şi* O.

7. *Fie* O *punctual de intersecție al diagonalelor unui paralelogram* ABCD. *Notăm cu* M, N *şi* P *proiecțiile vârfului* D *pe dreptele suport ale laturilor* [AB], [BC] *şi* [AC]. *Să se arate că punctele* M, N, P *şi* O *sunt patru puncte conciclice*.

INDICAȚIE. Notăm cu Q punctual de intersecție al tangentelor duse la cercul circumscris triunghiului ABC în vârfurile A şi C. Arătați apoi, că punctele D şi Q sunt puncte izogonale în triunghiul ABC.

Aplicația 8.

Arătați că într-un patrulater inscriptibil ABCD, *are loc relația*:

$|AC|.|BD| = |AB|.|CD| + |AD|.|BC|$.("Prima relație a lui PTOLEMEU")

Soluție: Notăm cu E punctual de intersecție al diagonalei [AC] cu izogonala semidreptei [DB față de $\angle ADC$ (v. fig.12).

Avem:

$$\left.\begin{aligned} \Delta ABD \sim \Delta DEC \Rightarrow \frac{|AB|}{|CE|} = \frac{|BD|}{|CD|} \Rightarrow |AB|.|CD| = |BD|.|CE| \\ \Delta AED \sim \Delta BCD \Rightarrow \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AE|}{|BC|} \Rightarrow |AD|.|BC| = |BD|.|AE| \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AB|.|CD| + |AD|.|BC| = |BD|.(|CE| + |AE|) = |BD|.|AC|. \blacksquare$$

Observație: Intenționat am dat soluția acestei probleme, doar schematic. Invitând astfel elevii să refacă demonstrația, complectând-o cu detaliile care lipsesc!

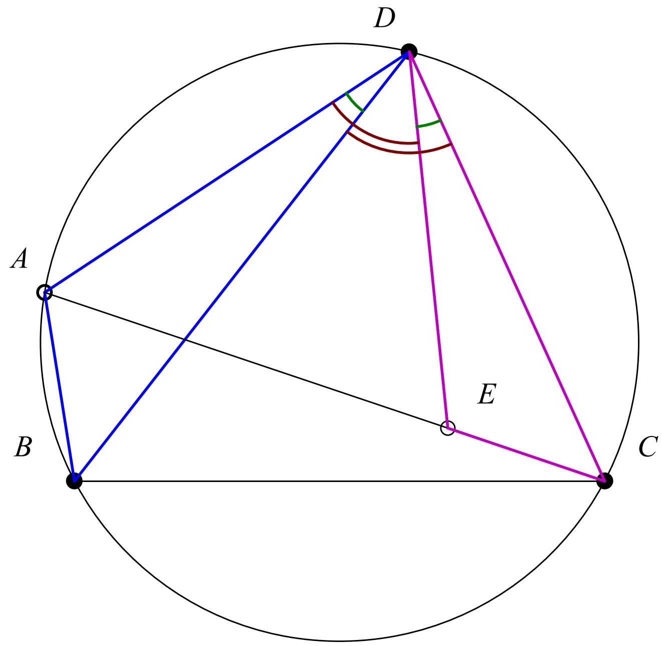

Fig.12.

Probleme propuse:

8. Fie P un punct al cercului circumscris unui triunghi echilateral, astfel încât punctele A şi P să se găsească de o parte şi de alta a dreptei BC. Arătaţi că are loc relaţia:

$|PA| = |PB| + |PC|$. (relaţia lui VAN SCHOOTEN).

9. Găsiţi o demonstraţie a teoremei lui PITAGORA, folosind relaţia lui PTOLEMEU (v. aplicaţia 8).

ALTE PROBLEME

10. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Notăm cu B_1 şi C_1 cel de al doilea punct de intersecţie al dreptelor AB şi AC cu cercul circumscris triunghiului OBC; A_2 şi B_2 cel de al doilea punct de intersecţie al dreptelor CA şi CB cu cercul circumscris triunghiului OAB; iar cu A_3 şi C_3 cel de al doilea punct de intersecţie al dreptelor BA şi BC cu cercul circumscris triunghiului OAC. Arătaţi că dreptele A_2A_3, B_1B_2 şi C_1C_3 sunt concurente.
(Olimpiadă Brazilia- 2009)

Soluţie(v.Fig.12):

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r} AA_3OC - inscriptibil \Rightarrow \sphericalangle OCA_3 \equiv \sphericalangle OAA_3 \\ |OA| = |OB| \Rightarrow \sphericalangle OAA_3 \equiv \sphericalangle A_3BO \end{array}\right\} \Rightarrow \sphericalangle OCA_3 \equiv \sphericalangle A_3BO \\ |OB| = |OC| \Rightarrow \sphericalangle OCB \equiv \sphericalangle OBC \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sphericalangle BCA_3 \equiv \sphericalangle A_3BC \Rightarrow |A_3B| = |A_3C|. \qquad (1)$$

În mod analog se arată că: $|A_2B| = |A_2C|$. (2)

În fine, relaţiile (1) şi (2) ne arată că dreapta A_2A_3 este mediatoarea laturii [BC].

În mod analog se arată că dreapta B_1B_2 este mediatoarea laturii [AC] şi dreapta C_1C_3 este mediatoarea laturii [AB]. Aşa că dreptele A_2A_3, B_1B_2 şi C_1C_3 sunt concurente în centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC. ■

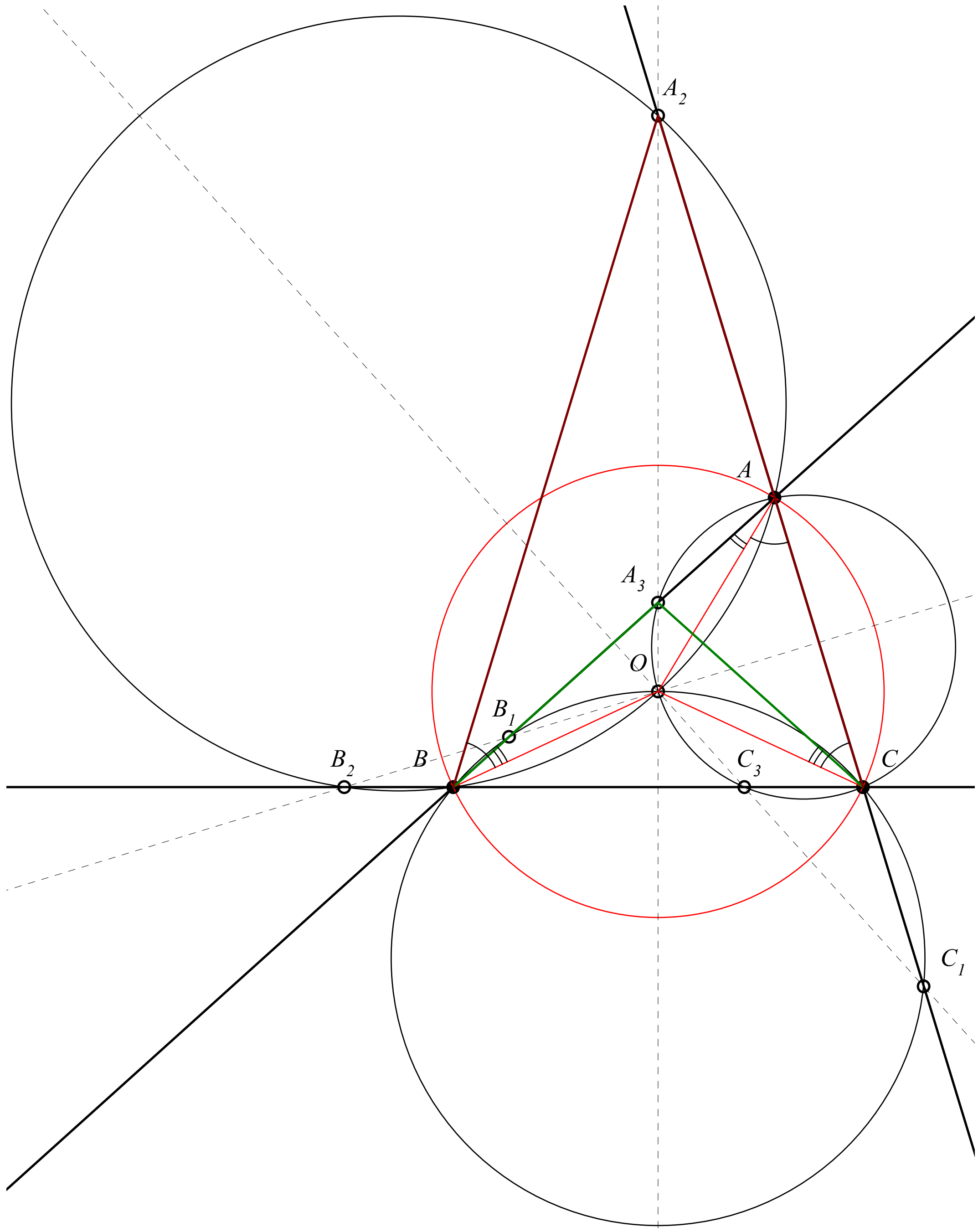

Fig.12.

11. În triunghiul oarecare ABC notăm cu T punctul de intersecție al tangente duse în vârfurile B şi C la cercul circumscris triunghiului; iar cu A', B' şi C' proiecțiile punctului T pe dreptele suport ale laturilor [BC], [CA] şi respectiv [AB]. Să se arate că patrulaterul $TB'A'C'$ este un parallelogram.

Indicație: Urmați sugestiile din figura 13.

Prof. *Mihai Miculița*, ORADEA.

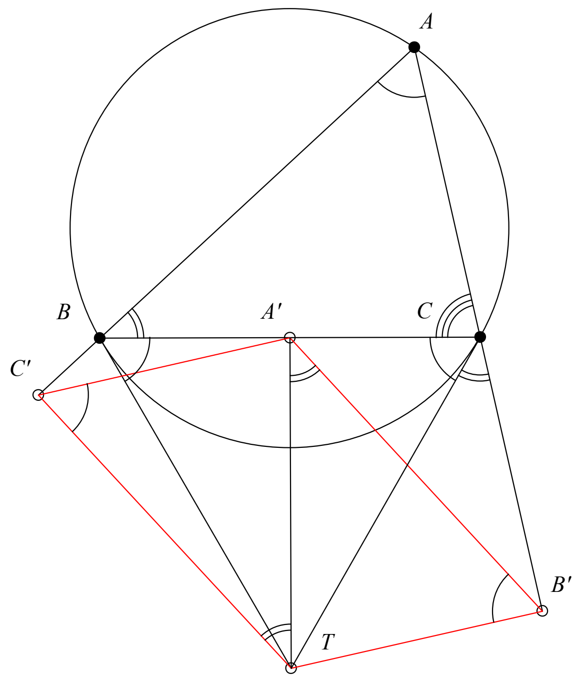

Fig.13.

12. Două cercuri (O;R) şi (O';R') sunt secante in punctele P şi Q şi fie ABC un triunghi înscris în cercul (O; R). Dreptele AP, BP şi CP intersectează a doua oară cercul (O'; R') în punctele A', B' şi C'. Să se arate că are loc relația: $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \left(\frac{R}{R'}\right)^2$.

Indicație: Folosind sugestiile din figura 14, demonstrați că triunghiurile ABC şi A'B'C' sunt asemenea.

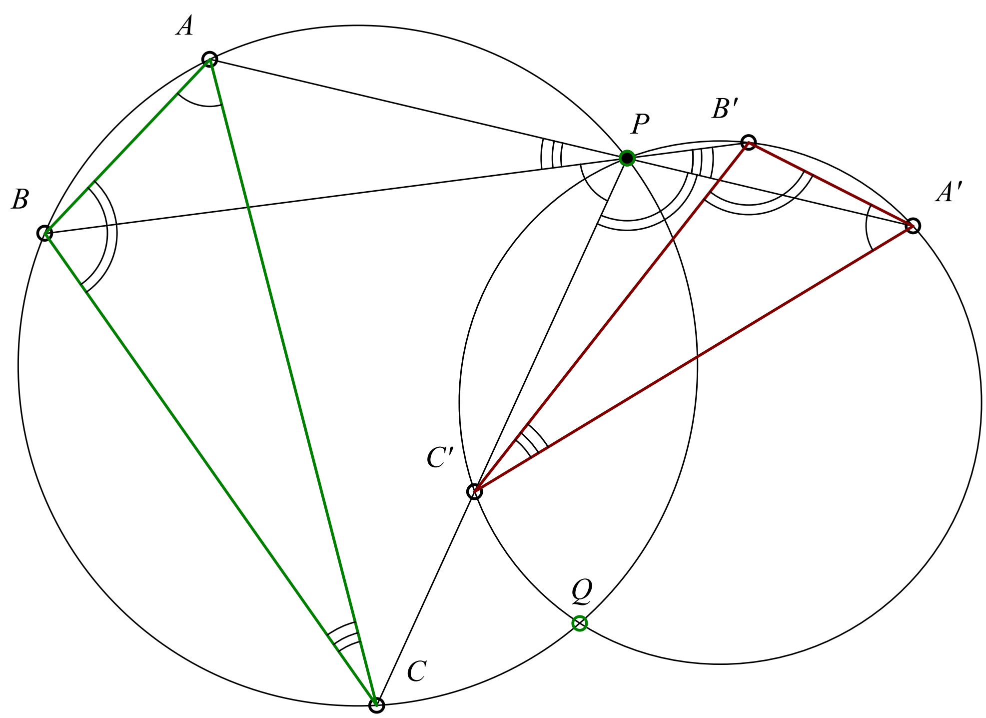

Fig.14.

13. Fie ABC un triunghi echilateral, D un punct arbitrar al laturii [BC], iar E acel punct al laturii [AC] pentru care are loc |BD|=|CE|. Notăm cu $\{F\}=AD\cap BE.$ Arătați că patrulaterul CEDF este inscriptibil.

14. Fie ABCD un pătrat, E un punct arbitrar al laturii [BC] şi F acel punct al laturii [CD] care îndeplineşte condiția: |BE|=|CF|. Demonstrați că: AE⊥BF.

15. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A şi D un punct arbitrar al catetei [AB]. Notăm cu E şi F proiecțiile vârfului A pe dreptele BC şi CD. Demonstrați că patrulaterul BEFD este inscriptibil.

16. Fie ABC un triunghi oarecare şi D piciorul bisectoarei unghiului ∠BAC. Notăm cu E cel de al doilea punct de intersecție al cercului circumscris triunghiului ADC cu dreapta AB, iar cu F pe cel de al doilea punct de intersecție al cercului circumscris triunghiului ABD cu dreapta AC. Arătați că: |BE|=|CF|.

17. În patrulaterul ABCD, notăm cu: $\{E\}=AB\cap CD$ şi cu: $\{F\}=AD\cap BC.$ Demonstrați că următoarele două afirmații sunt echivalente:

(i). patrulaterul ABCD este inscriptibil;

(ii). Bisectoarele unghiurilor ∠BEC şi ∠CFD sunt perpendiculare.

18. Pe laturile unui triunghi oarecare ABC, construim în afara triunghiului, triunghiurile echilaterale BCD, CAE şi ABF. Notăm cu O_a, O_b şi cu O_c centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor BCD, CAE şi respective ABF. Demonstrați că triunghiul $O_aO_bO_c$ este echilateral. (NAPOLEON BONAPARTE).

19. Pe diagonalele unui pararalelogram ABCD brept baze, construim triunghiurile echilaterale ACE şi BDF. Demonstrați că dreapta EF este perpendiculară pe două laturi opuse ale paralelogramului. (din "Gazeta Matematică")

20. În patrulaterul inscriptibil ABCD notăm cu M_{ab}, M_{bc}, M_{cd} şi cu M_{ad} mijloacele laturilor [AB], [BC], [CD] şi respectiv [AD]. Demonstrați că:

(i). patrulaterul $M_{ab}M_{bc}M_{cd}M_{ad}$ este un parallelogram;

(ii). perpendicularele duse din punctele M_{ab}, M_{bc}, M_{cd} şi M_{ad} pe dreptele suport ale laturilor [CD], [AD], [AB] şi respectiv [BC] sunt concurente.

21. Fie ADC un triunghi oarecare, iar D, E şi F câte un punct arbitral dreptei BC, AC şi respectiv AB. Notăm cu O_a, O_b şi cu O_c centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor AEF, BDF şi respectiv CED. Arătați că triunghiul $O_aO_bO_c$ este asemenea cu triunghiul ABC.

22. Fie ABCDEF un hexagon inscriptibil, în care diagonalele [AD], [BE] şi [CF] sunt concurente într-un acelaşi punct P. Demonstrați că are loc relația: |AB|.|CD|.|EF|=|BC|.|DE|.|AF|.

Oare este adevărată şi reciproca? Justificati!

23. Fie D, E şi F picioarele înălțimilor unui triunghi oarecare ABC, duse din vârfurile A, B şi respectiv C. Notăm cu M, N, P şi Q proiecțiile punctului D pe dreptele AB, BE, CE şi AC. Demonstrați M, N, P şi Q sunt patru puncte coliniare.

24. Fie P un punct arbitrar al cercului circumscris triunghiului ABC. Notăm cu A', B' şi cu C' proiecțiile punctului P de dreptele BC, CA şi AB. Demonstrați că punctele A', B' şi C' se găsesc pe o aceeaşi dreaptă, această dreaptă poartă numele de *dreapta lui* SIMSON *a punctului* P *fată de triunghiul* ABC. Arătați că are loc şi reciproca: în cazul în care proiecțiile ale unui punct P, pe dreptele suport ale laturilor triunghiului, sunt trei puncte coliniare, acel punct P se găseşte pe cercul circumscris triunghiului ABC.

25. (i). Fie ABCDEF un patrulater complet, demonstrați că centrele cercurilor circumscrise celor patru triunghiuri ale patrulaterului sunt patru puncte conciclice (*cercul lui* MIQUEL *al patrulaterului complet*);

(ii). Demonstrați că cercul lui Miquel trece prin punctul lui MIQUEL M.

INDICAȚIE: Folosiți rezultatul problemei 23 şi figura 13.

Prof. *Mihai Miculița*, ORADEA.

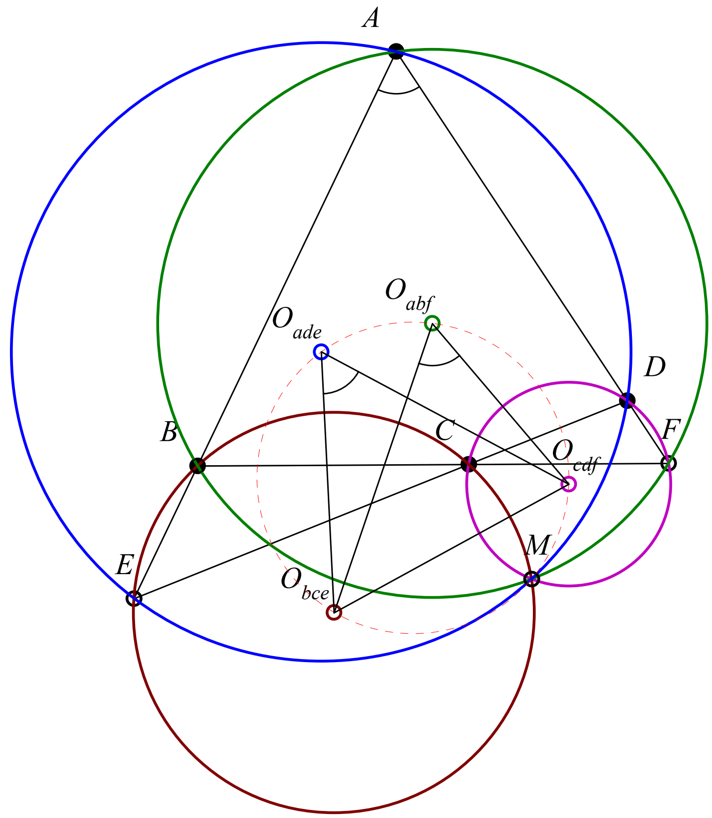

Fig.13.

26. Arătați că în planul unui patrulater complet ABCDEF, există un singur punct, a cărui proiecții pe laturile acestui patrulater sunt 4 puncte coliniare.

INDICAȚIE: Folosiți rezultatul stabilit în problema 22.

27. Fie ABC un triunghi oarecare şi P un punct arbitrar din planul său. Să se arate că simetricele cercurilor circumscrise triunghiurilor PBC, PAC şi PAB în mod respectiv, față de dreptele suport ale laturilor [BC], [CA] şi [AB] au un punct comun Q.(SCHOUTE)

28. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic. Notăm cu M şi N mijloacele înălțimilor BB_1 şi CC_1, iar cu $\{P\} = AM \cap CC_1$, $\{Q\} = AN \cap BB_1$. Arătați că punctele M, N, P şi Q sunt conciclice.

29. Fie ABCD un patrulater inscriptibil, O centrul cercului circumscris şi M punctual de intersecție al diagonalelor sale. Perpendiculara dusă dusă prin punctul M, pe dreapta OM, intersectează dreptele suport ale laturilor [AB] şi [CD], în punctele P şi Q. Să se arate că punctual M este mijlocul segmentului [PQ]. (Teorema "*fluturelui*")

30. Fie O punctul de intersecție al diagonalelor unui patrulater inscriptibil ABCD; iar U şi V mijloacele laturilor opuse [AB] şi [CD]. Să se arate că perpendicularele duse din punctele O, U şi V în mod respectiv pe dreptele AD, BD şi AC sunt concurente. (Olimpiadă, Lituania-1994)

31. Fie ABCD un patrulater inscriptibil şi O punctual de intersecție al diagonalelor sale. Notăm cu M mijlocul laturii [BC], iar cu P, Q şi cu R proiecțiile punctului O pe dreptele support ale laturilor [AB], [BC] şi respective [CD]. Demonstrați că punctele M, P, Q, şi R sunt patru puncte conciclice! (*Mihai Miculița*, rev."Minus", nr.1/2008).

32. Fie B un punct al segmentului (AC). Pe dreapta AC, drept bază construim triunghiurile echilaterale BCD, ACE şi ABF, astfel încât punctele D şi F să se găseasca de aceeaşi parte a dreptei AC, iar punctual E de cealaltă parte a dreptei AC. Notăm cu O_a, O_b şi cu O_c centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor BCD, ACE şi respectiv ABF. Arătați că:

(i). cercurile circumscrise triunghiurilor BCD, ACE şi ABF au un punct comun P;

(ii). dreptele AD, BE şi CF sunt concurente în P;

(iii). triunghiul $O_aO_bO_c$ este echilateral;

(iv). Cercul circumscris triunghiului $O_aO_bO_c$ trece prin punctul O. (v. fig.14). (Olimpiada, Spania-1995). (v. Fig.14)

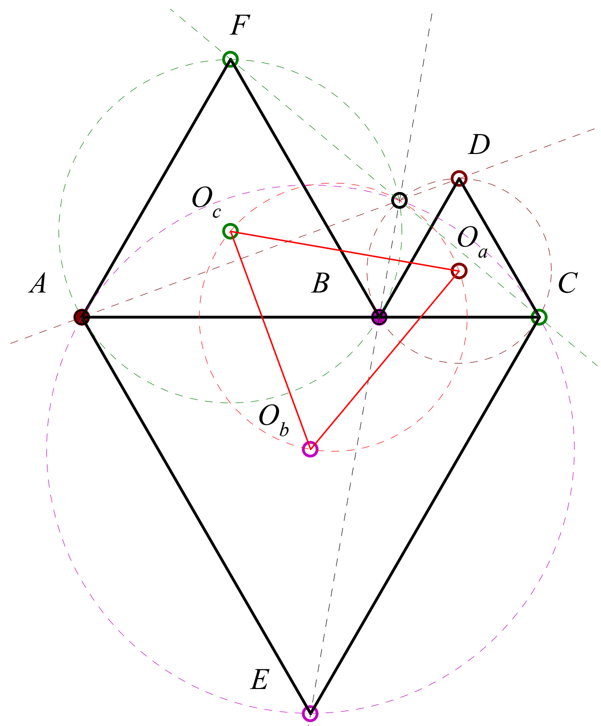

Fig.14.

33. Fie E şi F picioarele înălțimilor duse din vârdurile B şi C ale triunghiului oarecare ABC, iar M un punct arbitrar al cercului circumscris triunghiului. Notăm cu $\{P\} = MB \cap CF$, $\{Q\} = MC \cap BE$ şi cu: $\{R\} = EF \cap PQ$. Arătați că punctual R este mijlocul segmentului [PQ].

(*Son Ta Hong*, Hanoi-Vietnam; rev. "Mathematical reflections", nr.4/2008)

34. Fie ABCD un patrulater oarecare, O punctul de intersecție al diagonalelor, iar M şi N mijloacele diagonalelor $[A_1A_3]$ şi respectiv $[A_2A_4]$. Notăm cu P şi cu Q pe cel de al doilea punct de intersecție al cercurilor circumscrise triunghiurilor ABO şi CDO, iar cu Q pe cel de al doilea punct de intersecție al cercurilor circumscrise triunghiurilor ADO şi BCO. Să se arate că punctele M, N O, P şi Q sunt concivlice. (RUTTER; rev. "Mathesis", 1886).

35. Fie A, B şi C trei puncte coliniare şi O un punct exterior dreptei AB. Notăm cu O_a, O_b şi O_c centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor OBC, OAC şi OAB. Să se arate că punctele O, O_a, O_b şi O_c sunt conciclice.

36. Fie D, E şi F punctele de tangență ale cercului înscris în triunghiul ABC cu laturile [BC], [CA] şi [AB]. Notăm cu Q cel de al doilea punct de intersecție al dreptei AD cu cercul înscris. Paralela dusă prin A la dreapta BC intersectează dreptele DF şi DE în punctele P şi R. Arătți că: $\angle PQR \equiv \angle EQF$.

37. Să se demonstreze că înălțimile AH_a, BH_b şi CH_c unui triunghi ABC sunt dreptele suport ale bisectoarelor triunghiului ortic.

38. Fie ABCD un patrulater inscriptibil. Prin punctele A şi B, B şi C, C şi D, D şi A ducem patru cercuri arbitrare; aceste cercuri se mai intersectează, două câte două, în punctele A', B', C' şi D'. Arătați că punctele A', B', C' şi D' sunt conciclice.(v.fig.15)

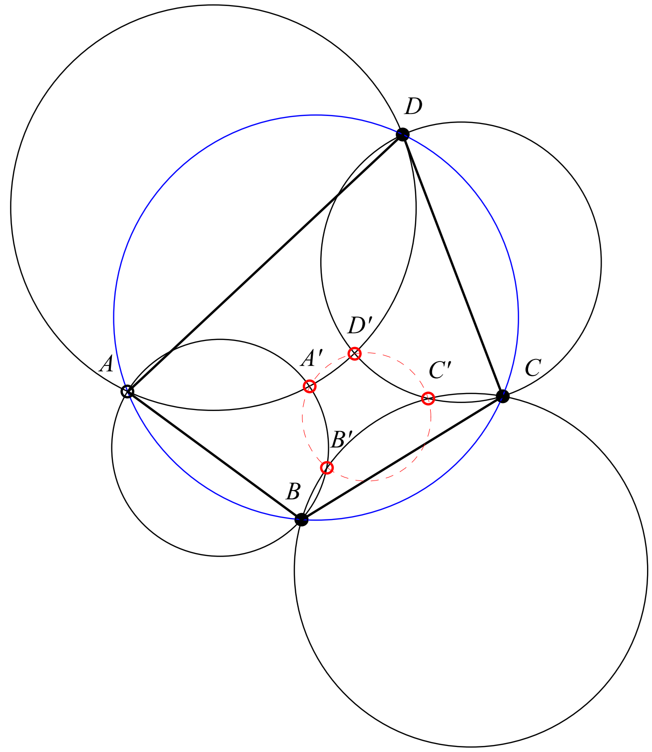

Fig.15.

39. Fie ABC un triunghi oarecare, M, N şi P mijloacele laturilor [BC], [AC] şi [AB], iar G centrul său de greutate. Notăm cu O_{bm}, O_{cm}, O_{cn}, O_{an}, O_{ap} şi cu O_{bp} cemtrele cercurilor circumscrise triunghiurilor GBM, GCM, GCN, GAN, GAP şi respectiv GBP. Arătați că O_{bm}, O_{cm}, O_{cn}, O_{an}, O_{ap} şi O_{bp} sunt şase puncte conciclice.[AMM, Floor van Lamoen]

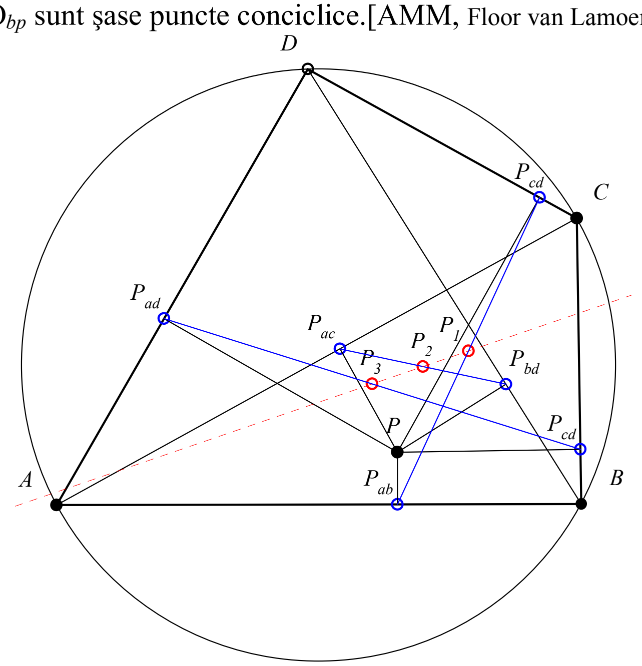

Fig.16.

40. Într-un patrulater inscriptibil ABCD, notăm cu P_{ab}, P_{bc}, P_{cd}, P_{ad}, P_{ac} şi P_{bd} proiecțiile unui punct arbitrar P pe dreptele AB, BC, CD, DA, AC şi respectiv BD; iar cu P_1, P_2 şi cu P_3 mijloacele segmentelor $[P_{ab}P_{cd}]$, $[P_{ac}P_{bd}]$ şi $[P_{ad}P_{bc}]$. Arătați că punctele P_1, P_2 şi P_3 sunt coliniare. (RENE BLANCHARD, Mathesis-1953, problema 3339)(v.Fig.16).