NIŞTE PROBLEME ÎNRUDITE, CARE AU LEGĂTURA
cu DREAPTA lui GAUSS-NEWTON

Prezentare: ***Mihai Miculiţa*****, profesor ORADEA**

Problema 1: Într-un patrulater complet $ABCDEF$, mijloacele M,N şi P, ale diagonalelor $[AC],[BD]$ şi $[EF]$, sunt trei puncte coliniare.

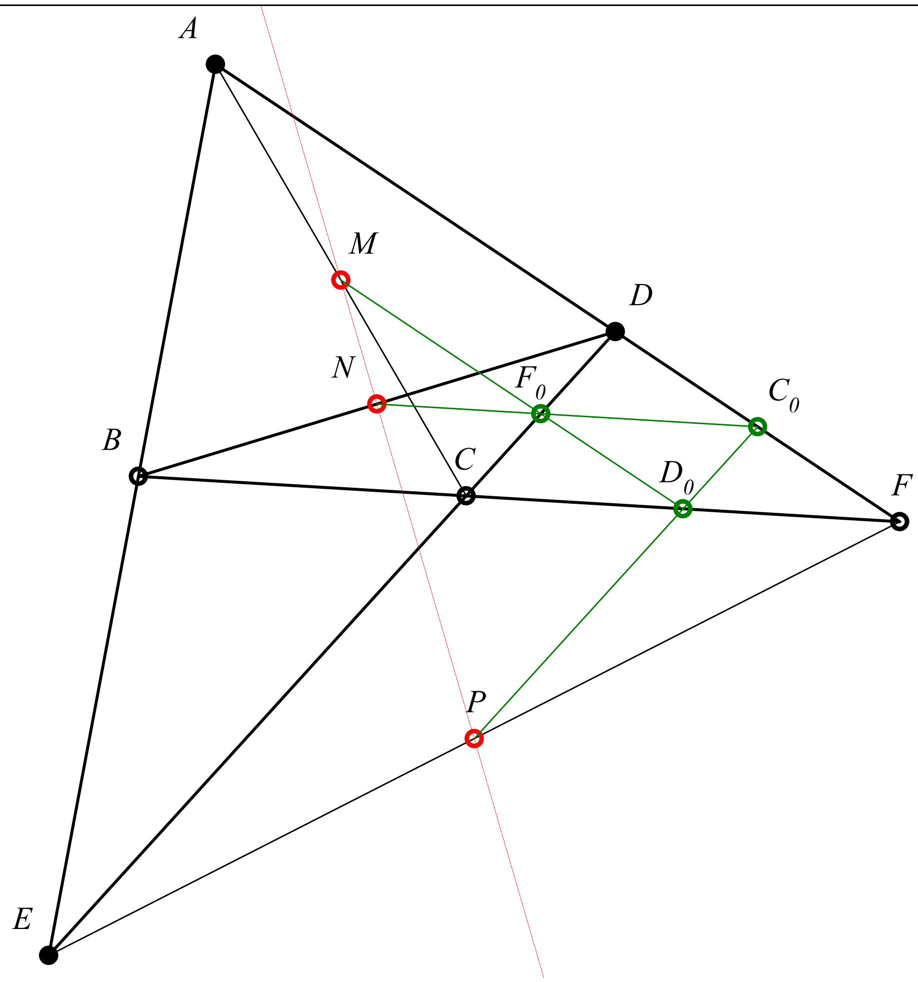

Fig.1.

SOLUŢIE: Notând cu C_0, D_0 şi F_0 – mijloacele laturilor $[DF],[CF]$ şi respective $[CD]$, ale triunghiului CDF, avem:

$$\left.\begin{array}{l}|MC|=|MA|\\|F_0C|=|F_0D|\end{array}\right\}\Rightarrow MF_0 \parallel AD; \quad (1) \quad \text{şi } |MF_0|=\frac{|AD|}{2}. \quad (2)$$

În mod analog arătăm că: $MD_0 \parallel AD$; (3) şi $|MD_0|=\frac{|AF|}{2}$. (4)

Din relaţiile (1) şi (3), rezultă că punctele $M\in F_0D_0$; (5)

iar din relaţiile (2) şi (4), obţinem, că: $\frac{|MF_0|}{|MD_0|}=\frac{|AD|}{|AF|}$. (6)

În mod analog se arată că: $P\in C_0D_0, \frac{|PD_0|}{|PC_0|}=\frac{|EC|}{|ED|}$ (7) şi $N\in F_0C_0, \frac{|NC_0|}{|NF_0|}=\frac{|BF|}{|BC|}$. (8)

Înmulţind acum relaţiile (6), (7) şi (8), membru cu membru, obţinem că:

$$\frac{|MF_0|}{|MD_0|}\cdot\frac{|PD_0|}{|PC_0|}\cdot\frac{|NC_0|}{|NF_0|}=\frac{|AD|}{|AF|}\cdot\frac{|EC|}{|ED|}\cdot\frac{|BF|}{|BC|}. \quad (9)$$

Pe de altă parte, aplicând acum teorema lui Menelaus în triunghiul CDF, la transversala $A-B-E$, obţinem: $\frac{|AD|}{|AF|}\cdot\frac{|EC|}{|ED|}\cdot\frac{|BF|}{|BC|}=1.$ (10)

În fine, din relaţiile (9) şi (10), rezultă ca: $\frac{|MF_0|}{|MD_0|}\cdot\frac{|PD_0|}{|PC_0|}\cdot\frac{|NC_0|}{|NF_0|}=1\Rightarrow$ punctele M,N şi $P-$sunt coliniare (folosind reciproca teoremei lui Menelaus în $\Delta F_0C_0D_0$) .■

Definiţie: Dreapta determinată de punctele M,N şi P, poartă numele de *dreapta lui* GAUSS-NEWTON *a patrulaterului complet* $ABCDEF$.

Problema 2: Într-un patrulater inscriptibil $ABCD$, notăm cu $\{E\}=AB\cap CD$ şi cu $\{F\}=AD\cap BC$. Arătaţi că punctul $S-$de intersecţie al bisectoarelor unghiurilor $\widehat{AEC}$ şi $\widehat{BFD}$, se găseşte pe dreapta lui Gauss-Newton a patrulaterului complet $ABCDEF$.

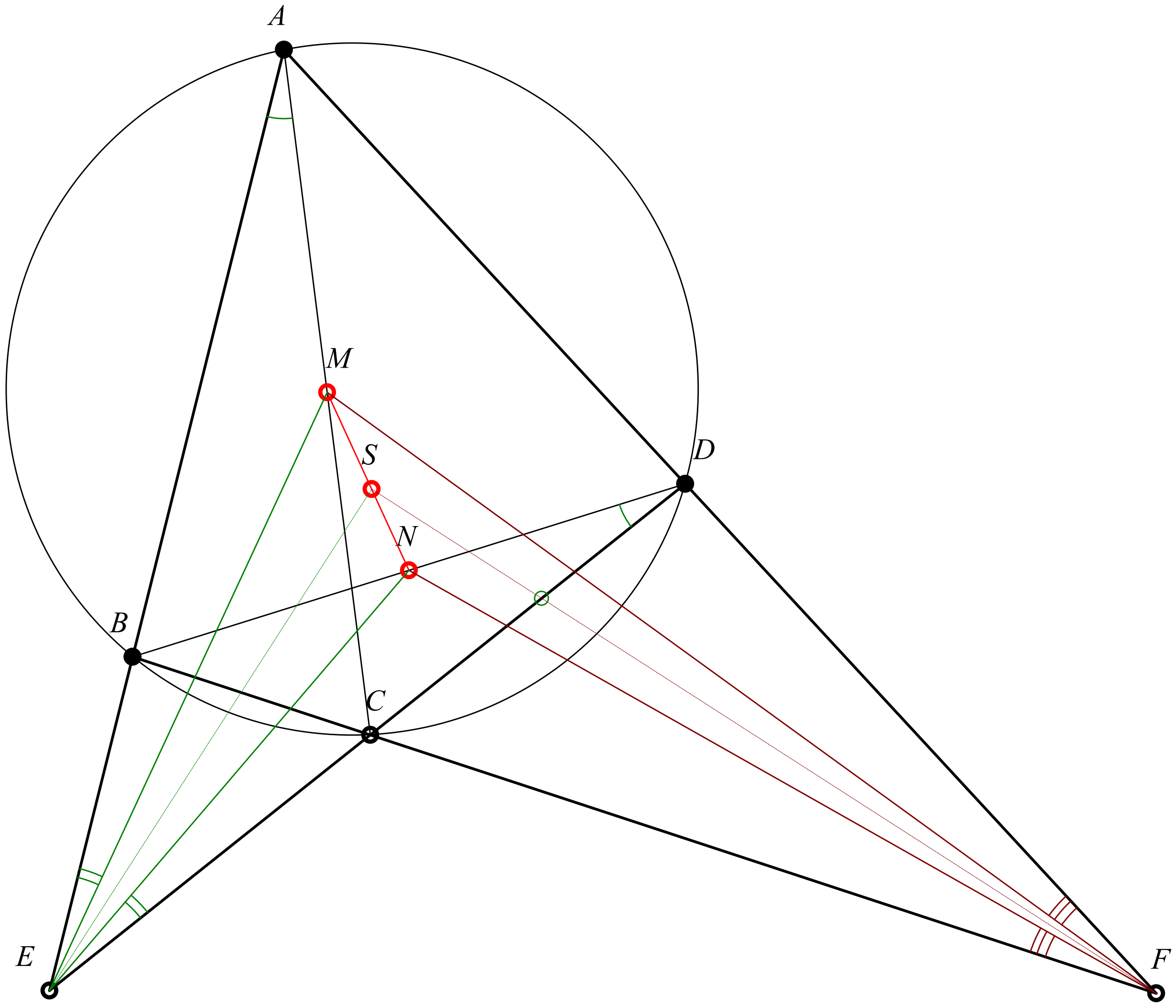

Fig.2.

SOLUŢIE: Cu notaţiile din Fig.2, avem:

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}ABCD-inscriptibil\Rightarrow\widehat{EAC}\equiv\widehat{BDE}\\ \widehat{AEC}=\widehat{BED}\end{array}\right\}\Rightarrow\Delta AEC\sim\Delta DEB\\ [MA]\equiv[MC]\wedge[ND]\equiv[NB]\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\widehat{AEM}\equiv\widehat{NED}; & (1)\\ \frac{|EM|}{|EN|}=\frac{|AC|}{|BC|}. & (2)\end{cases}$$

În mod analog, folosind faptul că: $\Delta AFC \sim \Delta BFD$ de unde deducem că: $\widehat{AFM} \equiv \widehat{NFB}$; (3)

şi $\dfrac{|FM|}{|FN|} = \dfrac{|AC|}{|BC|}$. (4)

Relaţia (1), ne arată că semidreptele $[EM$ şi $[EN$ – sunt izogonale faţă de unghiul $\widehat{AEC}$; aşa că, bisectoarea $[ES$ – a unghiului $\widehat{AEC}$ este bisectoare şi a unghiului $\widehat{MEN}$. În mod analog, folosindu-ne de relaţia (3), ajungem la concluzia că semidreapta $[FS$ – este bisectoarea comună a unghiurilor $\widehat{BEF}$ şi $\widehat{MFN}$.

Din relaţiile (2) şi (4), rezultă însă că: $\dfrac{|EM|}{|EN|} = \dfrac{|FM|}{|FN|}$, iar de aici rezultă, în virtutea teoremei bisectoarei, că punctul de intersecţie S – al bisectoarelor unghiurilor $\widehat{MEN}$ şi $\widehat{MFN}$, aparţine dreptei MN şi: $\dfrac{|SM|}{|SN|} = \dfrac{|EM|}{|EN|} = \dfrac{|FM|}{|FN|} = \dfrac{|AC|}{|BD|}$. ■

Problema 3: Într-un patrulater inscriptibil $ABCD$, notăm cu: $AB \cap BC = \{E\}$ şi $BC \cap AD = \{F\}$. Arătaţi că bisectoarele unghiurilor $\widehat{BEC}$ şi $\widehat{CFD}$ sunt perpendiculare.

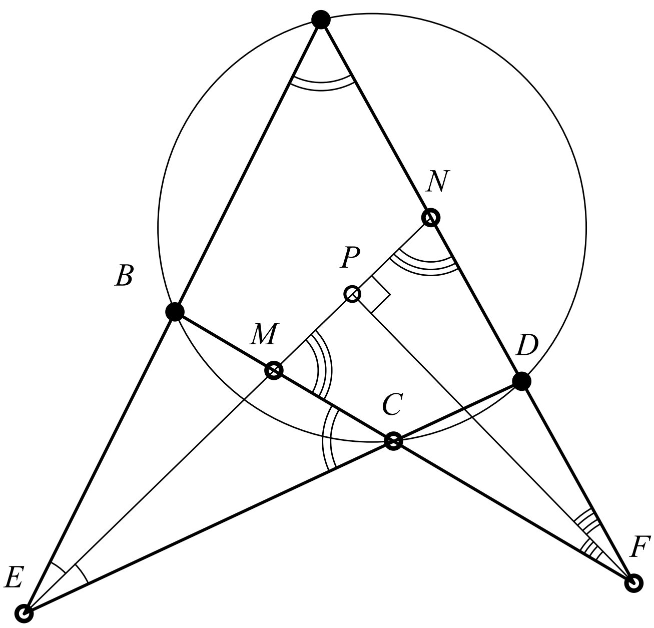

Fig.3.

SOLUŢIA I: Notând cu P – punctul de intersecţie al bisectoarelor unghiurilor $\widehat{BEC}$ şi $\widehat{CFD}$; iar cu $\{M\} = EP \cap BC$ şi $\{N\} = EP \cap AD$, avem:

$$\left.\begin{array}{r} ABCD-inscriptibil \Rightarrow \underline{\widehat{EAN}} \equiv \underline{\widehat{ECM}} \\ \underline{\underline{\widehat{AEN}}} \equiv \underline{\underline{\widehat{MEC}}} \end{array}\right\} \Rightarrow m\left(\widehat{MNF}\right) = m\left(\underline{\widehat{EAN}}\right) + m\left(\underline{\underline{\widehat{AEN}}}\right) =$$

$$= m\left(\underline{\widehat{ECM}}\right) + m\left(\underline{\underline{\widehat{AEN}}}\right) = m\left(\widehat{NMF}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \widehat{MNF} \equiv \widehat{NMF} \Rightarrow |FM| = |FN| \\ \widehat{MFP} \equiv \widehat{NFP} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{FP \perp EP}. \blacksquare$$

SOLUŢIA a II-a: Notând cu $\{O\} = [AC] \cap [BD]$ şi cu S – punctul de intersecie al bisectoarelor unghiurilor $\widehat{BEC}$ şi $\widehat{CFD}$; iar cu N şi P – punctele de intersecţie al bisectoarelor unghiurilor $\widehat{BOC}$ şi $\widehat{COD}$, în mod respectiv cu laturile $[BC]$ şi $[CD]$ (v.fig.4), avem:

$$ABCD - inscriptibil \Leftrightarrow \widehat{ABD} \equiv \widehat{ACD} \Leftrightarrow \widehat{OBE} \equiv \widehat{OCE}. \quad (1)$$

Ţinând acum seama de teorema: "Într-un patrulater care are două unghiuri opuse congruente, bisectoarele celorlate două unghiuri opuse sunt paralele (demonstraţi!)", din patrulaterul $OBEC$, obţinem:

$$\left.\begin{array}{r} \widehat{OBE} \equiv \widehat{OCE}; (1) \\ \widehat{SEB} \equiv \widehat{SEC} \\ \widehat{BON} \equiv \widehat{NOC} \end{array}\right\} \Rightarrow ES \parallel ON. \quad (2)$$

În mod analog se arată că avem şi $EF \parallel PO.$ (3)

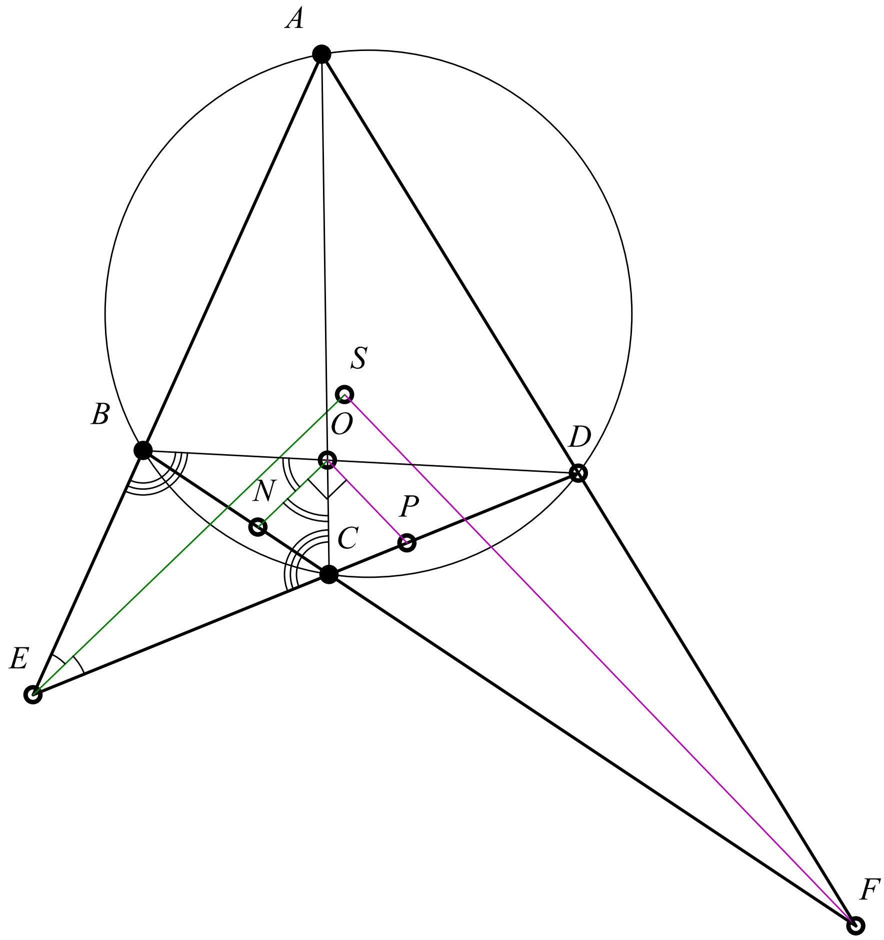

Fig.4.

Semidreptele $[ON$ şi $[OP -$ fiind bisectoarele a două unghiuri adicente suplementare, avem: $ON \perp OP.$ (4)

În fine, din relaţiile (2), (3) şi (4), rezultă că: $\boxed{ES \perp FS}$. ■

Problema 4: Pe laturile $[AB], [BC], [CD]$ şi $[AD]$, ale unui patrulater inscriptibil $ABCD$ se dau punctele M, N, P şi respectiv Q, astfel încât să avem:

$$\frac{|MA|}{|MB|} = \frac{|PD|}{|PC|} = \frac{|AD|}{|BC|} \text{ şi: } \frac{|NB|}{|NC|} = \frac{|QA|}{|QD|} = \frac{|AB|}{|CD|}.$$

Arătaţi că: $MP \perp NQ.$

SOLUŢIE (v.Fig.5): Notând cu $S -$ punctul de intersecţie al bisectoarelor unghiurilor $\widehat{BEC}$ şi $\widehat{CFD}$; pe baza teoremei "bisectoarei glisante", avem: $ES \perp FS.$ (1)

Pe de altă parte, pe baza lemei anterioare, avem: $MP \parallel FS$; (2) şi $NQ \parallel ES.$ (3)

În fine, din relaţiile (1), (2) şi (3), rezultă că: $\boxed{MP \perp NQ}$. ■

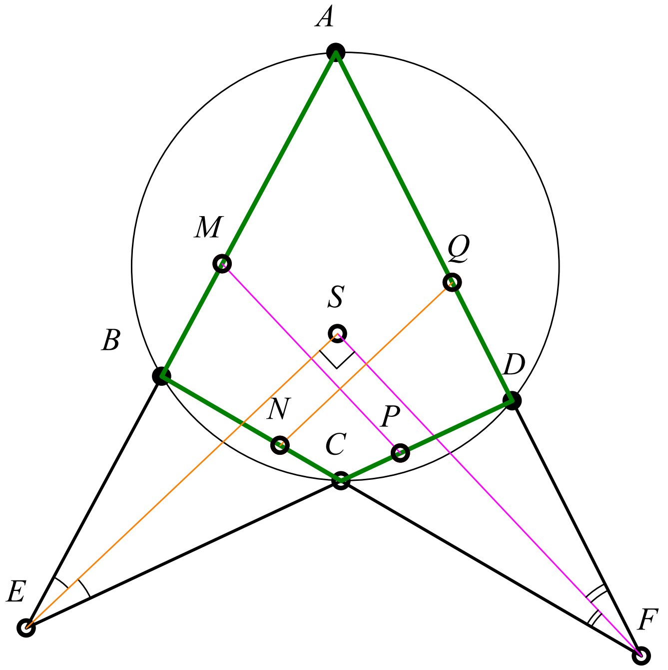

Fig.5.

EXERCIŢIU:

Găsiţi o a doua soluţie a problemei 4, arătând că punctul de intersecţie al dreptele MP şi NQ coincide cu punctul $\{O\} = [AC] \cap [BD]$ şi apoi, că ele sunt bisectoarele celor 4 unghiuri cu vârful în O, determinate de diagonalele $[AC]$ şi $[BD]$.