

Soluții juniori

Problema 1

Determinați cea mai mică sumă a cifrelor numărului $3n^2 + n + 1$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Soluție(prof. Cristian Mangra, București):

Pentru $n = 8$, obținem numărul 201 care are suma cifrelor 3.

Vom arăta că numerele de forma $3n^2 + n + 1$ nu pot avea suma cifrelor egală cu 1 sau cu 2.

Deoarece numerele de forma $3n^2 + n + 1$ sunt impare ele nu pot fi scrise ca 10^k sau $2 \cdot 10^k$, unde $k \in \mathbb{N}^*$.

Dacă $3n^2 + n + 1 = 10^k + 1$, atunci $n(3n + 1) = 10^k$. Deoarece $(n, 3n + 1) = 1$, obținem cazurile:

- $n = 5^k$, $3n + 1 = 2^k$, evident imposibil.
- $n = 2^k$, $3n + 1 = 5^k$, imposibil, deoarece, pentru $k = 1$ obținem $7 = 5$, iar, pentru $k \geq 2$ avem $5^k > 4^k > 3 \cdot 2^k + 1$.

Problema 2

Fie n un număr natural, $n \geq 2$. În fiecare pătrățel unitate al unei table $n \times n$ se scrie câte un număr din mulțimea $M = \{1, 2, \dots, 2n - 1\}$. O completare a pătratului se numește „bună” dacă, pentru fiecare număr natural i , $1 \leq i \leq n$, linia i și coloana i conțin, împreună, toate numerele din M .

a) Arătați că există un număr natural n , $n \geq 3$, astfel încât să avem o completare „bună” a tablei;

b) Demonstrați că, pentru $n = 2017$, nu există o completare „bună” a tablei.

Soluție(lector.dr. Andrei Eckstein, Timișoara):

a) Pentru $n = 4$ obținem, de exemplu, următoarea completare „bună”:

1	2	4	5
3	1	6	4
7	5	1	2
6	7	3	1

b) Vom arăta că, pentru orice n impar, nu există o completare „bună” a tablei.

Presupunem contrariul.

Pentru oricare $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, fiecare dintre numerele din mulțimea

M apare o singură dată atât pe coloana i , precum și pe coloana i .

Notăm cu a_{ij} numărul care apare la intersecția liniei i cu coloana j ,

unde $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Fie $S_i = a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{in} + a_{1i} + a_{2i} + \dots + a_{ni}$, unde numărul a_{ij} este considerat o singură dată.

Orice număr k din M trebuie să fie termen în n asemenea sume. Dacă $a_{ij} = k$, $i \neq j$, atunci k

va contribui atât la suma S_i precum și la suma S_j . Așadar, orice număr care nu este situat

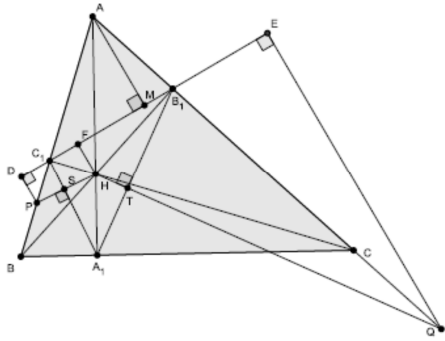
pe diagonala principală contribuie la două sume. Cum, în total, există un număr impar de sume, numărul k trebuie să apară la un număr impar de sume pe diagonala principală. Deci orice număr din M trebuie să apară pe diagonala principală. Contradicție.

Problema 3

Se consideră un triunghi ascuțitunghic ABC în care A_1, B_1, C_1 sunt picioarele înălțimilor duse din A, B , respectiv C , iar H este ortocentrul. Perpendicularele din H pe dreptele A_1C_1 și A_1B_1 intersectează dreptele AB , respectiv AC în punctele P și Q .

Demonstrați că perpendiculara din A pe dreapta B_1C_1 conține mijlocul segmentului $[PQ]$.

Soluție 1 (prof. Cristian Mangra, București):



Punctul H este centrul cercului înscris în triunghiul $A_1B_1C_1$, iar punctul A este centrul cercului exînscris al aceluiași triunghi, corespunzător laturii $[B_1C_1]$. Fie

$PD \perp B_1C_1, D \in B_1C_1, \{S\} = HP \cap A_1C_1, HF \perp B_1C_1, F \in B_1C_1$

Deducem că $DC_1 = SC_1 = C_1F$. (1)

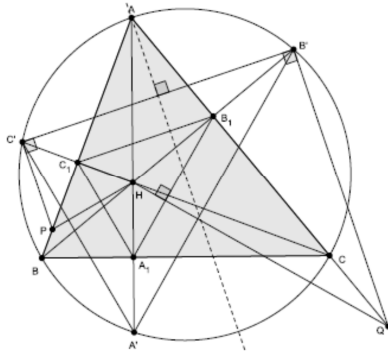
Analog, dacă $QE \perp B_1C_1, E \in B_1C_1, \{T\} = HQ \cap A_1B_1$,

atunci $EB_1 = TB_1 = B_1F$. (2)

Dacă $AM \perp B_1C_1, M \in B_1C_1$, perechile de puncte $(F, M), (C_1, B_1)$ sunt izotomic conjugate, adică $FC_1 = MB_1$. (3)

Din (1), (2) și (3) deducem că punctul M este mijlocul segmentului $[DE]$, deci AM este mediatoarea segmentului $[DE]$ și, în trapezul dreptunghic $DEQP$, va tăia latura $[PQ]$ în mijloc.

Soluție 2 (prof. Mircea Fianu, București):



Fie A', B', C' simetricele punctului H față de dreptele BC, AC și respectiv AB . Atunci triunghiul $A'B'C'$ este omoteticul triunghiului $A_1B_1C_1$ în raport cu H și are același cerc

circumscriș ca și triunghiul ABC . Deasemenea,

$A'H, B'H, C'H$ sunt și bisectoarele triunghiului $A'B'C'$.

Cum triunghiul QHB' este isoscel cu $QH = QB'$, avem

$$m(\widehat{HB'Q}) = m(\widehat{QHB'}) .$$

Prin urmare, avem :

$$m(\widehat{C'B'Q}) = m(\widehat{HB'Q}) + m(\widehat{C'B'H}) = m(\widehat{QHB_1}) + m(\widehat{C_1B_1H}) = m(\widehat{QHB_1}) + m(\widehat{HB_1A_1}) = 90^\circ$$

Analog, obținem $m(\widehat{B'C'P}) = 90^\circ$.

Deoarece $AB' = AC'$, perpendiculara din A pe B_1C_1 va fi mediatoarea segmentului $[B'C']$, deci paralelă cu QB' și cu PC' deci va tăia latura PQ a trapezului $B'C'PQ$ la mijloc.

Problema 4

Determinați tripletele de numere naturale nenule (x, y, z) care verifică egalitatea

$$x^4 + y^4 = 2z^2 , \text{ iar numerele } x \text{ și } y \text{ sunt prime între ele.}$$

Soluție(prof. Lucian Petrescu, Tulcea):

Observăm că numerele x și y sunt impare.

Deducem că și z este impar și este prim cu numărul xy .

Egalitatea din enunț se transformă succesiv în $x^8 + 2x^4y^4 + y^8 = 4z^4$, echivalentă cu

$$(x^4 - y^4)^2 = 4z^4 - 4x^4y^4, \text{ sau } z^4 - (xy)^4 = \left(\frac{x^4 - y^4}{2}\right)^2.$$

Arătăm că egalitatea $a^4 - b^4 = c^2$ (*), unde $c \in \mathbb{N}$, numerele naturale a și b sunt impare, iar $(a, b) = 1$, are loc numai dacă $c = 0$.

Presupunem că $c \neq 0$ și fie (a_0, b_0, c_0) o soluție a ecuației (*) cu a_0 minim.

Din $a_0^4 - b_0^4 = c_0^2$, deducem că există numerele naturale $m > n > 0$, de parități diferite, astfel încât $a_0^2 = m^2 + n^2$, $b_0^2 = m^2 - n^2$, $c_0 = 2mn$. Prin urmare, $m^4 - n^4 = (ab)^2$, adică tripletul (m, n, ab) este încă o soluție pentru (*). Dar, cum $a_0 > m$, obținem contradicție cu minimalitatea lui a_0 . Rezultă că $c = 0$.

Deducem că $x = y$ și, cum $(x, y) = 1$, obținem $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.