# TEORIA NUMERELOR
## „LIFTING THE EXPONENT” – „LTE ”

**BREVIAR TEORETIC:**

**Def: *Dacă $n$ este număr natural nenul şi $p$ este prim, atunci exponentul lui $p$ din descompunerea în factori primi a numărului $n$ se notează cu* $\boxed{v_p(n)}$.**

Din definiţie rezultă imediat că dacă $p$ este prim şi $m, n \in \mathbb{N}^*$, atunci:

| | |
|---|---|
| **1.** $v_p(n) = m \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow p^m \mid n$ şi $p^{m+1} \nmid n$. | **2.** $v_p(n) = 0 \Leftrightarrow (p, n) = 1$. |
| **3.** $v_p(p) = 1$, oricare ar fi numărul prim $p$. | **4.** $v_p(m+n) \geq \min\{v_p(m); v_p(n)\}$. |
| **5.** $\boxed{v_p(mn) = v_p(m) + v_p(n)}$. | |

Se demonstrează următoarele

**PROPRIETĂŢI:** Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $p$ un număr prim şi $x, y \in \mathbb{Z}$ care nu sunt divizibile prin $p$. Atunci:

**1.** dacă $p \neq 2$ şi $p \mid x - y$, atunci $\boxed{v_p(x^n - y^n) = v_p(x-y) + v_p(n)}$.

**2.** dacă $p = 2$ şi $4 \mid x - y$, atunci $\boxed{v_2(x^n - y^n) = v_2(x-y) + v_2(n)}$.

**3.** dacă $p = 2$, $n$ este par şi $2 \mid x - y$, atunci $\boxed{v_2(x^n - y^n) = v_2(x-y) + v_2(x+y) + v_2(n) - 1}$.

**4.** dacă $n$ este impar, $x + y > 1$ şi $p \mid x + y$, atunci $\boxed{v_p(x^n + y^n) = v_p(x+y) + v_p(n)}$.

**Probleme rezolvate**

**1.** Fie $p$ un număr prim, $p \neq 3$ şi $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $p \mid a + b$ şi $p^2 \mid a^3 + b^3$. Demonstrați că $p^2 \mid a + b$ sau $p^3 \mid a^3 + b^3$.

**Soluţie**:

Dacă $p \mid a$ sau $p \mid b$ din ipoteza $p \mid a + b$ rezultă imediat că $p^3 \mid a^3 + b^3$.

Fie în cele ce urmează $p \nmid ab$. Cum $p \mid a + b$, aplicând *LTE* (4) obținem $v_p(a^3 + b^3) = v_p(a+b) + \underbrace{v_p(3)}_{=0}$.

**2.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale nenule ecuaţia $x^{2009} + y^{2009} = 7^z$.

**Soluţie**:

$2009 = 7^2 \cdot 41$; cum $x + y \mid x^{2009} + y^{2009}$ şi $x + y > 1$ rezultă $7 \mid x + y$.

Deci aplicând *LTE* (4) obţinem $v_7\left(x^{2009}+y^{2009}\right)=v_7(x+y)+\underbrace{v_7(2009)}_{=2}$, adică $x^{2009}+y^{2009}=49k(x+y)$, $k\in\mathbb{N}^*$, $(k,7)=1$. Din ecuaţie obţinem $k=1$ şi deci $x^{2009}+y^{2009}=49(x+y)$.

Perechea $(1,1)$ nu verifică ecuaţia anterioară, iar dacă $x>1$ sau $y>1$, atunci evident că $x^{2009}+y^{2009}>49(x+y)$; prin urmare ecuaţia nu are soluţii.

**3.** Determinaţi numerele naturale $a,b>1$ pentru care $b^a \mid a^b-1$.

**Soluţie**:

Fie $p$ cel mai mic divizor prim al lui $b$ şi $m$ cel mai mic număr natural pentru care $p\mid a^m-1$. Atunci $m\mid b$ şi $m\mid p-1$, deci orice divizor prim al lui $m$ îl divide pe $b$ şi este mai mic decât $p$. Prin urmare trebuie să avem $m=1$.

Dacă $p$ este impar obţinem $av_p(b)\le v_p(a-1)+v_p(b)$, adică $a-1\le(a-1)v_p(b)\le v_p(a-1)$, ceea ce este imposibil.

Aşadar $p=2$, $b$ este par, $a$ este impar şi $av_2(b)\le v_2(a-1)+v_2(a+1)+v_2(b)-1$, de unde rezultă că $a\le(a-1)v_2(b)+1\le v_2(a-1)+v_2(a+1)$, care este posibilă dacă şi numai dacă $a=3$ şi $v_2(b)=1$.

Dacă notăm $b=2c$, cu $c$ impar, relaţia din enunţ poate fi rescrisă sub forma $2^3c^3\mid 3^{2c}-1$.

Fie $q$ cel mai mic divizor prim al lui $c$ (evident că $q$ este impar ) şi $n$ cel mai mic număr natural astfel încât $q\mid 3^n-1$. Atunci $n\mid 2c$ şi $n\mid q-1$, de unde rezultă că trebuie să fie 1 sau 2 (sau $c$ să aibă un divizor prim şi mai mic, fals); aşadar $q\mid 3-1=2$ sau $q\mid 3^2-1=8$, lucru evident fals.

Concluzionăm că $c=1$ şi $b=2$.

**<u>Probleme propuse</u>**

**1.** Fie $k\in\mathbb{N}^*$. Determinaţi toate numerele naturale nenule $n$ astfel încât $3^k\mid 2^n-1$.

**2.** Arătaţi că dacă $4\left(a^n+1\right)$ este cub perfect pentru orice valoare naturală nenulă a lui $n$, atunci $a=1$.

**3.** Determinaţi $x,y\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $p^x-y^p=1$, unde $p$ un număr prim.

**4.** Aflaţi toate numerele prime $p$ pentru care există $x,y,n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $x^3+y^3=p^n$.

**5.** Determinaţi $n,p\in\mathbb{N}^*$, cu $p$ prim, pentru care $\dfrac{n^p+1}{p^n+1}$ este număr natural.

**6.** Fie $p$ un număr prim şi $a,n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $2^p+3^p=a^n$. Arătaţi că $n=1$.

**7.** Fie $p$ un număr prim. Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale nenule ecuaţia $a^p-1=p^k$.

**8.** Determinaţi $m,n\in\mathbb{N}^*$ pentru care $(n-1)!+1=n^m$.

**9.** Dacă $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $3^n-2^n$ este o putere a unui număr prim, atunci arătaţi că $n$ este prim.

**10.** Fie $n\in\mathbb{N}^*$ un număr liber de pătrate. Arătaţi că nu există $x,y\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $(x+y)^3\mid x^n+y^n$.

**11.** Aflaţi $n\in\mathbb{N}^*$ pentru care există $x,y,k\in\mathbb{N}^*$, cu $k\ge 2$ şi $(x,y)=1$ astfel încât $x^k+y^k=3^n$.

**Prof. Lucian Petrescu**