Câteva aplicaţii ale teoremei lui Casey

Marius PACHIŢARIU[1]

O generalizare remarcabilă a *teoremei lui Ptolemeu* este *teorema lui Casey*. Se numeşte *distanţă tangenţială* dintre cercurile $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$, notată d_{12}, lungimea tangentei lor comune exterioare.

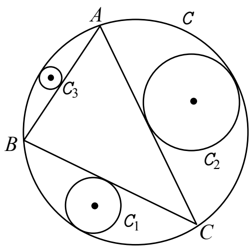
Teorema lui Casey. *Dacă cercurile $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$ sunt tangente (toate interior sau toate exterior) la cercul $\mathcal{C}$, ordinea punctelor de tangenţă fiind dată de numerotarea acestor cercuri, atunci are loc relaţia:*

$$d_{12} \cdot d_{34} + d_{23} \cdot d_{41} = d_{13} \cdot d_{24}.$$

Rezultatul rămâne adevărat dacă cercurile $\mathcal{C}_i$ (toate sau o parte din ele) degenerează în puncte sau dacă cercul $\mathcal{C}$ devine dreaptă.

Aplicaţia 1. *Fie ABC un triunghi înscris în cercul $\mathcal{C}$ şi cercurile $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ tangente la $\mathcal{C}$ interior precum şi laturilor (BC), (CA) şi respectiv (AB) astfel încât A şi $\mathcal{C}_1$, B şi $\mathcal{C}_2$, C şi $\mathcal{C}_3$ să fie de părţi diferite faţă de BC, CA, respectiv AB. Notăm cu l_1, l_2, l_3 lungimile tangentelor din A, B, C la cercurile $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, respectiv $\mathcal{C}_3$. Are loc echivalenţa:*

$$d_{12} = d_{23} = d_{31} \Leftrightarrow l_1 = \frac{b+c}{2},\ l_2 = \frac{c+a}{2},\ l_3 = \frac{a+b}{2}.$$



Soluţie. Observăm mai întâi că $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ sunt tangente la laturi în mijlocul acestora. Aplicând teorema lui Casey pentru cercurile $\mathcal{C}$ şi A, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_3$; $\mathcal{C}$ şi B, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_1$; $\mathcal{C}$ şi C, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_2$, obţinem:

$$\frac{b}{2}d_{13}+\frac{c}{2}d_{12}=l_1 d_{23},\ \frac{c}{2}d_{12}+\frac{a}{2}d_{23}=l_2 d_{13},\ \frac{a}{2}d_{23}+\frac{b}{2}d_{13}=l_3 d_{12}.$$

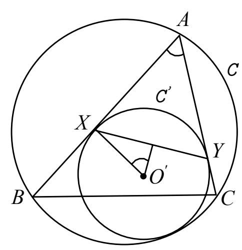
Din acestea, rezultă imediat implicaţia "$\Rightarrow$". Invers, după înlocuirea lui l_1 cu $\dfrac{b+c}{2}$ etc., aceste relaţii se scriu:

$$b\,(d_{13}-d_{23}) = c\,(d_{23}-d_{12})\,,\ c\,(d_{12}-d_{13}) = a\,(d_{13}-d_{23})\,,\ a\,(d_{23}-d_{12}) = b\,(d_{12}-d_{13})\,,$$

$$\text{i.e. } \frac{d_{12}-d_{13}}{a} = \frac{d_{23}-d_{12}}{b} = \frac{d_{13}-d_{23}}{c} = \frac{0}{a+b+c}$$

(suma numărătorilor fiind nulă). Deducem că $d_{12}-d_{13}=0$, $d_{23}-d_{12}=0$, $d_{13}-d_{23}=0$, deci $d_{12} = d_{23} = d_{31}$, q.e.d.

Aplicaţia 2. *Fie ABC un triunghi înscris în cercul $\mathcal{C}$ şi cu $m(\widehat{A}) = 60°$. Fie $\mathcal{C}'\,(O', R')$ cercul tangent la $\mathcal{C}$ interior şi la laturile $[AB]$ şi $[AC]$. Să se arate că $R' = \dfrac{4}{3}r$, unde r este raza cercului înscris în triunghiul dat.*



Soluţie. Fie $\{X\}=AB\cap\mathcal{C}'$, $\{Y\}=AC\cap\mathcal{C}'$ şi $l = AX = AY = XY$ ($\triangle AXY$ este echilateral, căci $m(\widehat{A}) = 60°$). Relativ la $\mathcal{C}$ şi cercurile A, C, $\mathcal{C}'$, B aplicăm teorema lui Casey:

$$b\,(c-l) + c\,(b-l) = al,$$

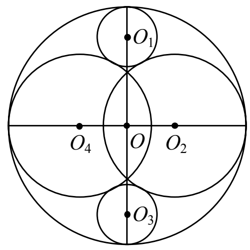
[1] Elev, cl. a IX-a, Colegiul Naţional, Iaşi

de unde obţinem că $l = \dfrac{2bc}{a+b+c} = \dfrac{bc}{p} = \dfrac{bc}{S} r = \dfrac{2bc}{bc \sin A} r = \dfrac{4}{\sqrt{3}} r$. Pe de altă parte, $R' = O'X = \dfrac{XY}{2 \sin 60^\circ} = \dfrac{l}{\sqrt{3}}$. Ca urmare, $R' = \dfrac{4}{3} r$.

Aplicaţia 3. *Cercurile $\mathcal{C}_i(O_i, r_i)$, $i = \{1,2,3,4\}$ sunt tangente (în ordinea numerotării) la cercul $\mathcal{C}(O, r)$ şi, pentru orice $i \in \{1,2,3,4\}$, $\mathcal{C}_i$ este tangent la $\mathcal{C}_{i-1}$ şi $\mathcal{C}_{i+1}$ ($\mathcal{C}_{-1}$ fiind $\mathcal{C}_4$, iar $\mathcal{C}_5$ fiind $\mathcal{C}_1$). Atunci, în condiţia că punctele O, O_1, O_3 cât şi O, O_3, O_4 sunt coliniare, avem:*

a) $4r_1r_2r_3r_4 = (r - r_1)(r - r_2)(r - r_3)(r - r_4)$, *dacă $\mathcal{C}_i$ sunt tangente interior la $\mathcal{C}$;*

b) $4r_1r_2r_3r_4 = (r + r_1)(r + r_2)(r + r_3)(r + r_4)$, *dacă $\mathcal{C}_i$ sunt tangente exterior la $\mathcal{C}$.*

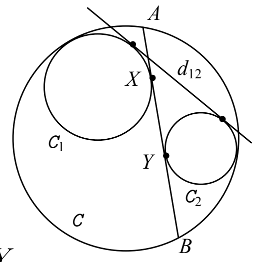


Soluţie. Se stabileşte uşor că două cercuri de raze a şi b tangente exterior au lungimea α a tangentei comune exterioare dată de $d = 2\sqrt{ab}$. Ca urmare, teorema lui Casey ne conduce la relaţia:

$$2\sqrt{r_1r_2} \cdot 2\sqrt{r_3r_4} + 2\sqrt{r_2r_3} \cdot 2\sqrt{r_1r_4} = d_{13} \cdot d_{24}.$$

Datorită coliniarităţii punctelor O, O_1 O_3, avem $d_{13}^2 = (2r - r_1 - r_3)^2 - (r_1 - r_3)^2$, adică $d_{13}^2 = 4(r - r_1)(r - r_3)$; analog $d_{24}^2 = 4(r - r_2)(r - r_4)$. Înlocuind în relaţia precedentă obţinem formula de la punctul a). Punctul b) se dovedeşte în mod asemănător.

Aplicaţia 4. *Fie dat un cerc $\mathcal{C}$ şi pe el punctele A şi B. De o parte şi de alta a dreptei AB considerăm cercurile $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ tangente interior la $\mathcal{C}$ şi tangente coardei $[AB]$ în punctele X şi respectiv Y. Să se determine poziţia punctelor X şi Y pe AB pentru care $d_{12} = \dfrac{1}{2} AB$.*



Soluţie. Cu teorema lui Casey aplicată lui $\mathcal{C}$ şi cercurilor $\mathcal{C}_1$, A, $\mathcal{C}_2$, B, obţinem $AX \cdot BY + AY \cdot BX = AB \cdot d_{12}$. Condiţia din enunţ este echivalentă cu

$$AX \cdot BY + AY \cdot BX = \frac{1}{2} AB \cdot AB \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2AX \cdot BY + 2AY \cdot BX = (AX + BX) \cdot (AY + BY) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AX \cdot BY + AY \cdot BX - AX \cdot AY - BX \cdot BY = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (AX - BX) \cdot (BY - AY) = 0 \Leftrightarrow AX = BX \text{ sau } AY = BY,$$

adică unul dintre punctele X şi Y trebuie să fie mijlocul coardei $[AB]$ (celălat putând fi oriunde pe $[AB]$) pentru a fi îndeplinită condiţia problemei.

Bibliografie.

1. **M. Drăguşin** - *Despre utilitatea unui rezultat prea puţin folosit: teorema lui Casey*, G.M. 12/1995, 716-720.
2. **N. Roman** - *Asupra unor probleme date la O.I.M.*, G.M. 3/2000, 99-102.