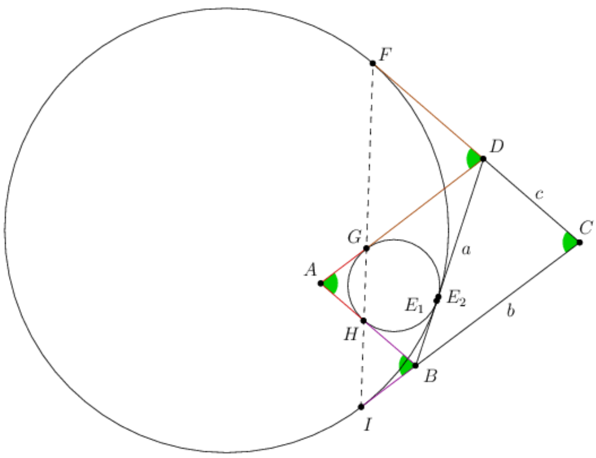
1. The benches of the Great Hall of the Parliament of Neverenough are arranged in a rectangle of 10 rows of 10 seats each. All the 100 MPs have different salaries. Each of them asks all his neighbours (sitting next to, in front of, or behind him, as well as those four seated diagonally in front of or behind him, i.e. 8 members at most) how much they earn. They feel a lot of envy towards each other: an MP is content with his salary only if he has at most one neighbour who earns more than himself. What is the maximum possible number of MPs who are satisfied with their salaries?
Solution: Represent the assembly hall of the parliament by a 10 by 10 table. It is easy to see that at most two out of the four MPs seated in any 2 by 2 square may be satisfied with their salaries. Since the 10 by 10 table can be divided into 25 2×2 squares, in each of which there may be at most two satisfied MPs, there may be at most 50 such members of the whole parliament.
We cannot state more than that. If the MPs seated in the even-numbered rows all have lower salaries than those in the odd-numbered rows, and within each odd-numbered row the salaries decrease left to right, then there will be exactly 50 satisfied MPs. (pb **B.3490.**)

2. Într-un paralelogram, diagonala mai scurtă împarte paralelogramul în două triunghiuri. Se consideră cercul înscris într-unul din aceste triunghiuri şi cercul exînscris tangent diagonalei în celălalt triunghi. Arătaţi că cele patru puncte de tangenţă ale celor două cercuri care nu se află pe diagonala paralelogramului sunt coliniare.
Soluţie:



În figura de mai sus, unghiurile marcate cu verde sunt congruente. Cum $DF = DG = p - c$, $AG = AH = p - a$ şi $BH = BI = p - b$, triunghiurile DFG, AGH şi BHI sunt isoscele şi au unghiurile de la bază congruente.

3. A positive integer $n > 2$ is said to be *undivided* if $1 < k < n$ and $(k, n) = 1$ imply that k is a prime. How many undivided numbers greater than 2 are there? (pb **B. 3651**)

Soluţie: 3,4,6,8 sunt undivided. În general trebuie să fie $n = p + 1$, unde p este prim, pentru că $(n, n-1) = 1$ deci $n - 1$ prim. Pentru $n > 10$ trebuie $(n, 9) \neq 1$, deci $3|n$. Rezultă 12, 18, 24 undivided. De aici înainte trebuie ca $5|n$. 30 e undivided. Trebuie ca n să se împartă cu toate numerele prime mai mici decât $\sqrt{n}$. Dar $n < \prod_{p<\sqrt{n}} p$. Asta revine la: dacă numerele prime mai mici decât n sunt $p_1, ..., p_k$, ar fi destul să arăt că $p_1 \cdot ... \cdot p_k > {p_{k+1}}^2 > n$. Iese banal prin inducţie pentru că ${p_{k+1}}^3 > 4p_{k+1}^2 > p_{k+2}^2$ deoarece între p_{k+1} şi $2p_{k+1}$ există număr prim. Inducţia merge de la $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 > 11^2$ deci nu mai sunt alte numere undivided.

4. A 23×23 square is divided into smaller squares of dimensions 1×1, 2×2 and 3×3. What is the minimum possible number of 1×1 squares? (OMUS 1989, Engel, pag 40; KöMaL: pb **B. 4283.**)

Soluţie: Colorăm alternativ pe benzi şi constatăm că trebuie cel puţin un pătrat 1×1 (2×2-urile acoperă la fel de multe pătrate albe ca şi negre, iar 3×3-urile acoperă cu $3k$ mai multe pătrate negre decât albe, iar 23 nu e $3k$). Dacă e să dăm exemplu cu un singur pătrat 1×1, el trebuie să fie pe linie şi coloană pară. Dacă îl luăm în mijloc, putem sparge pătratul în: câte două dreptunghiuri 9×15 şi 8×14 pavabile numai cu 2×2 şi 3×3 şi un dreptunghi 5×7 cu pătratul 1×1 în mijloc.

5. The forum of this journal on the internet has exactly $6n$ registered members. Each member sends an e-mail to one other member and receives exactly one mail from one other member. Prove that we can select a group of at least $2n$ and at most $3n$ members such that no one in the group sent an e-mail to anyone else.

Soluţie: Graful se descompune în produs de cicluri; din fiecare ciclu putem lua fiecare al doilea vârf. Daca fiecare ciclu e de lungime pară putem alege $3n$, dacă nu, atunci din fiecare ciclu jumătatea mai mică; dacă toate ciclurile au lungime 3, din fiecare ciclu pot alege unul singur, total $2n$.

6. Given that $a + b \leq c + 1$, $b + c \leq a + 1$, $c + a \leq b + 1$ for the numbers $a, b, c \geq 0$, show that $a^2 + b^2 + c^2 \leq 2abc + 1$.

Soluţie: $a + b + c \leq 3$. Presupunem $c \leq b \leq a$. Dacă $b \geq 1$ atunci $2 \leq a + b \leq c + 1$ deci $a, b, c \geq 1$, de unde $a = b = c = 1$, caz în care afirmaţia e evidentă.

Dacă $c \leq b < 1$ atunci $b + c - 1 \leq a \leq 1 - b + c$. Inecuaţia de gradul 2 $a^2 - 2bc \cdot a + b^2 + c^2 - 1 \leq 0$ are $\Delta = (b^2 - 1)(c^2 - 1) > 0$, deci inecuaţia are soluţiile $a \in [bc - \sqrt{(b^2-1)(c^2-1)}, bc + \sqrt{(b^2-1)(c^2-1)}]$. Mai avem de arătat că $[b + c - 1, \ 1 - b + c] \subset [bc - \sqrt{(b^2-1)(c^2-1)}, bc + \sqrt{(b^2-1)(c^2-1)}]$ care e un calcul simplu.

MAI SIMPLU: Inegalitatea de demonstrat revine la $a \geq bc - \sqrt{(b^2-1)(c^2-1)}$, ceea ce rezultă din $a \geq b + c - 1$.

7. In the parallelogram $ABCD$, $2BD^2 = BA^2 + BC^2$. Show that the circumscribed circle of triangle BCD goes through one of the points that trisect the diagonal AC. (pb **B. 4229.**)
Hint: Identitatea paralelogramului şi puterea lui O faţă de cercul circumscris lui BCD.

8. This problem is a classic: A town is surrounded by a circular wall. There are 12 guards serving on the wall. At twelve noon, each guard leaves his watchpost and starts walking the wall in some direction, at a speed at which it would take exactly one hour to walk around the whole town. If two guards meet, they both turn around immediately and walk at the same speed in the opposite direction. Prove that at twelve midnight each guard will be back at his watchpost. (pb **B. 4154.**)
Soluţie: După o oră fiecare e la câte un post, iar ordinea lor nu s-a schimbat. Chiar dacă fiecare s-a mutat cu k posturi mai la ..., după 12h fiecare va fi înapoi la locul lui. (vezi şi lecţia ,,ciocniri")

9. A, B, C, D, E and F are a group of six people. n bars of chocolate given to the group in the following way: Everyone gets at least one, A gets less than B, B gets less than C, C gets less than D, D gets less than E, and finally, F gets the most. The members of the group know these conditions, they know the value of n, and of course, they know how many bars of chocolate they were given themselves. They have no other information available for them. What is the smallest possible value of n for which it is possible to give them the bars of chocolate so that no one can tell how many bars of chocolate everyone has? (pb **B. 4313.**)
Soluţie: n este cel puţin $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. 21 sau 22 bucăţi se pot împărţi în mod unic, astfel fiecare ştie cine cât a luat. 23 se pot împărţi în două moduri, $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 8$ sau $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7)$; dar E şi F pot atunci spune cine cât a luat. 24 se pot împărţi în 3 moduri $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 9$, $1+2+3+4+6+8$, şi $1+2+3+5+6+7)$ dar F poate spune cine câte bucăţi are. Dacă 25 bucăţi se împart $1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 8$, A, B, C şi F pot crede că bucăţile s-au împărţit $1+2+3+4+7+8$, iar D şi E pot crede că s-a produs $1+2+4+5+6+7$.

10. Let $a \geq b \geq c > 0$. Prove that $\dfrac{a^2 - b^2}{c} + \dfrac{c^2 - b^2}{a} + \dfrac{a^2 - c^2}{b} \geq 3a - 4b + c$.
(pb **B. 4364.**)
Soluţie: $\dfrac{a^2 - b^2}{c} + \dfrac{c^2 - b^2}{a} + \dfrac{a^2 - c^2}{b} \geq 2(a - b) + 2(c - b) + (a - c) = 3a - 4b + c$ cu egalitate dacă $a = b = c$.