1. Fie a, b, c numere reale pozitive cu $a^2+b^2+c^2=1$. Aflaţi minimul expresiei

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}.$$

Soluţie: Vom arăta că $\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)^2 \geq 3(a^2+b^2+c^2)$, $\forall\, a,b,c>0$, de unde va rezulta imediat că minimul căutat este cel puţin $\sqrt{3}$.
Avem, folosind $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$, $\forall\, x,y,z$, că

$$\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)^2 \geq 3(a^2+b^2+c^2)=3.$$

Deoarece valoarea $\sqrt{3}$ este atinsă pentru $a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$, rezultă că minimul căutat este $\sqrt{3}$.

VO 2013-14, et 6, cls a 8-a

2. Fie $ABCD$ un paralelogram. Arătatţi că cercurile Euler ale triunghiurilor ABC şi ADC sunt tangente.
Soluţie: Cele două cercuri se taie în O, punctul de intersecţie a diagonalelor. Dacă cele două cercuri ar mai avea un punct, P, în comun, atunci via simetria de centru O (care invariază intersecţia celor două cercuri), ar rezulta că şi simetricul lui P în raport cu O ar aparţine intesecţiei celor două cercuri, deci cele două cercuri ar avea cel puţin trei puncte în comun. Cum cele două cercuri nu pot coincide, am ajuns la contradicţie.
VO 2013-14, et 6, cls a 8-a

3. I e punctul lui Torricelli în triunghiul ABC (adică punctul situat în interiorul triunghiului pentru care $m(\sphericalangle AIB)=m(\sphericalangle BIC)=m(\sphericalangle CIA)=120°$). Demonstraţi că dreptele Euler ale triunghiurilor ABI, BCI şi CAI sunt concurente.
Soluţie: Construim în exteriuor triunghiurile echilaterale BCA", etc. IBA"C e inscriptibil, deci centrul cercului circumscris lui IBC este centrul de greutate al lui BCA". Atunci dreapta lui Euler a lui IBC e paralelă cu $A-I-A$" şi trece prin G.

4. An interior point of a regular $2n$-gon is connected to each vertex to form $2n$ triangles. The triangles are colored red and blue alternately. Prove that the total blue area equals the total red area.
Soluţie: (Pentru octogon: perechile de triunghiuri ,,opuse" au aceeaşi culoare; latura înmulţită cu apotema dă suma ariilor celor doua triunghiuri. Merge la fel pentru orice $4k$.)
Pentru $2n$ în general: prelungim laturile roşii până se taie. Se formează un poligon regulat roşu cu n laturi. Suma distanţelor la laturile acestui poligon este constantă

(din arii).

5. Prove that every natural number not divisible by 10 can be multiplied by an appropriate natural number, such that the product is a palindromic number in decimal notation.
Soluţie: Fie $n = a^k \cdot p$ unde $a \in \{2, 5\}$, $(p, 10) = 1$ şi r răsturnatul lui n.
Fie $x = r\underbrace{000...0}_{k}n$ şi m numărul cifrelor sale. Considerăm numerele $n_j = \underbrace{xxx...x}_{j \text{ buc}}$.
Toate aceste numere sunt palindromice şi divizibile cu a^k. Printre numerele n_j, $j \geq 1$, vom găsi două, n_j, n_i cu $j > i$, care dau acelaşi rest la împărţirea cu p. Atunci $n_j - n_i = \underbrace{xxx...x}_{j-i \text{ buc.}} \cdot 10^{im}$ este divizibil cu p, deci n_{j-i} este multiplu de p, aşadar şi de n.

6. Each member of the sequence a_1, a_2, ..., a_{2n+1} is either 2, 5 or 9. No two consecutive members are equal, and $a_1 = a_{2n+1}$. Prove that $a_1a_2 - a_2a_3 + a_3a_4 - a_4a_5 + ... - a_{2n}a_{2n+1} = 0$.
Soluţie: Practic avem $2n$ numere pe cerc. Daca avem un grup xyx îl inlocuim cu x fără să afectăm suma cerută. La sfârşit rămânem cu $xyzxyz...$. Am rămas tot cu un număr par de termeni. Trebuie să fie $6k$ termeni. Dar $xy - yz + zx - xy + yz - zx = 0$.

7. All the numbers have fallen down one by one from the face of an old wall-clock. Prove that if we replace the numbers, in any order, on the empty face of the clock, there will be three consecutive numbers among them that add up to 20 at least. Is it always true that there will also be a sum greater than 20?
Soluţie: e adevărat. Media sumelor de câte 3 este 19,5; dacă am avea maxim 20, cum nu putem avea două sume egale vecine ($a + b + c = b + c + d$ ar implica $a = d$) putem avea cel mult 6 sume de 20. Atunci trebuie să avem fix 6 sume de 20 în alternanţă cu sume de 19 (sume mai mici ar scădea media sub 19,5). Asta nu se poate pentru că secvenţa $19 - a - b, a, b, 20 - a - b$ trebuie să fie urmată de $a - 1, b + 1$ şi trebuie să fie precedată tot de $b + 1$.
SAU: Lângă 12, la 3 distanţă trebuie să apară 11 şi 13, imposibil.

8. Is it true that every integer has at least as many positive divisors of the form $4k + 1$ as that of the form $4k - 1$?
Soluţie: Da. Fie $n = 2^a p_1^{a_1}...p_n^{a_n} q_1^{b_1}...q_m^{b_m}$. Divizorii de forma $4k{+}1$ sunt $p_1^{x_1}...p_n^{x_n} q_1^{y_1}...q_m^{y_m}$ cu $y_1 + ... + y_m = par$, în vreme ce divizorii de forma 4k-1 sunt cei de forma $p_1^{x_1}...p_n^{x_n} q_1^{y_1}...q_m^{y_m}$ cu $y_1 + ... + y_m = impar$.
Dacă există vreun b_i impar, divizorii impari ai lui n sunt de forma $y_i^{b_i} \cdot ceva$. Jumătate dintre aceşti divizori sunt de forma $4k + 1$, ceilalţi sunt $4k - 1$.
Dacă nu există un asemenea factor atunci putem împerechea divizorii diferiţi de 1 şi obţinem că avem cu un divizor mai mult de forma $4k{+}1$ decât de forma $4k{-}1$.

9. Two players alternately mark the fields of a 5×5 board. The one who moves first always writes one X sign, while the second player always writes two O signs. The one who first completes a row or a column of the board with her signs, wins the game. How can the second player win the game?
Soluţie: Permutând liniile şi coloanele, putem presupune că jocul începe cu un X în a_{11}. Pun zerouri în a_{22} şi a_{23}. Putem presupune că X-ul nu vine în linia 3 sau 4. Următoarea mea mutare va fi să pun zerouri în a_{32} şi a_{33}. Cu mutarea precedentă şi cea actuală X-ul mi-a blocat cel mult două din L2, L3, C2, C3. Pun câte un O pe fiecare din cele două L/C rămase. Ameninţ ,,mat" la două capete; adversarul face abia a 4-a mutare deci nu-mi dă mat. Intersecţia celor două L/C, dacă exista, e ocupată de o piesă de-a mea deci nu îmi poate bloca ambele ameninţări cu un singur X.

10. Ann wrote 32 integers on a large sheet of paper, and covered each number with a card. Then he told Bob that if he chose 7 cards, she would tell him whether the sum of the 7 covered numbers is odd or even. At least how many times did Bob have to choose 7 cards in order to find out if the sum of all 32 numbers on the sheet was odd or even?
Soluţie: 6 încercări. Trebuie cel puţin 5, altfel nu văd toate numerele. Cu 5 nu merge pentru că există cel puţin un număr care a fost ,,cântărit de un număr par de ori şi odată cu el a fost cântărit şi un număr cântărit o singură dată deci putem schimba paritatea. Cu 6 putem alege 6 numere pe care să le vedem de câte 3 ori iar celelalte o dată.
VO 2013, clasa a 7-a, faza finală