Problema C3. Într-un cerc de diametru 1 sunt luate $N = 65$ puncte (trei câte trei necoliniare). Demonstraţi că există un triunghi determinat de trei dintre aceste puncte, de arie $\alpha \leq \dfrac{1}{72}$.

Solution. Voi căuta, în general, pentru N puncte situate într-o figură plană convexă de arie A şi perimetru P, estimarea unei cât mai mici valori α astfel încât să existe un triunghi determinat de trei dintre aceste puncte, de arie cel mult α.

Acoperirea convexă a mulţimii celor N puncte este un poligon convex cu $3 \leq k \leq N$ vîrfuri, şi deci $N - k$ puncte în interiorul său. Dar ştim că orice triangulare a acestui poligon este formată din exact $t = 2(N-1) - k$ triunghiuri. Cum aria acoperirii convexe este cel mult A, rezultă că măcar unul dintre triunghiurile Δ_f ale triangulării are aria cel mult

$$\frac{A}{t} = \frac{A}{2(N-1)-k} = f(k).$$

Pe de altă parte, cum perimetrul acoperirii convexe este cel mult P, se pot găsi două laturi consecutive $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, de lungimi a, b, aşa încât $\dfrac{a+b}{2} \leq \dfrac{P}{k}$. Dar atunci aria triunghiului Δ_g determinat de $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ este

$$\frac{1}{2} ab \sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{P^2}{2k^2} = g(k).$$

Deoarece $f(k)$ este crescătoare, iar $g(k)$ este descrescătoare, cazul cel mai rău este pentru valoarea calculată în k_0 unde graficele lui f şi g se întâlnesc, adică pentru

$$\frac{A}{2(N-1)-k_0} = \frac{P^2}{2k_0^2}.$$

Acum, în cazul nostru $A = \pi/4$ iar $P = \pi$, deci pentru $N = 65$ vom avea $k_0 = 25$, pentru care $\alpha = g(k_0) < \dfrac{1}{126} < \dfrac{1}{72}$. Pe de altă parte, pentru $N = 40$ vom avea $k_0 = 19$, pentru care $\alpha = g(k_0) < \dfrac{1}{73} < \dfrac{1}{72}$. ■

Remarcă. Desigur, estimările sunt grosolane; şi A şi P pot fi înlocuite cu aria, respectiv perimetrul poligonului regulat cu k vârfuri înscris în cercul de rază 1, deci rezultatele pot chiar fi (uşor) îmbunătăţite. Oricum însă, calculele de mai sus arată că $N = 40$ puncte sunt îndeajuns pentru $\alpha \leq \dfrac{1}{72}$, iar pentru $N = 65$ puncte se obţine chiar $\alpha \leq \dfrac{1}{126}$.

Problemă. (de tipul Problema 4, a lui M. Perianu) Determinaţi numerele întregi pozitive a, b, c pentru care

$$7^a + 1 = 3^b + 5^c.$$

Soluţie. Prea migăloasă pentru a ţi-o reda ... Singura soluţie este $(a, b, c) = (1, 1, 1)$.