Olimpiada Balcanică de Matematică pentru Juniori
Ediţia a VII-a, Izmir (Turcia), 20 - 25 iunie 2003

A. Problemele de concurs - enunţuri şi soluţii

1. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Numărul A este format din $2n$ cifre de 4, iar numărul B este format din n cifre de 8. Să se arate că $A + 2B + 4$ este pătrat perfect.

S. Grkovska, Macedonia

2. Fie n puncte în plan, oricare trei necoliniare, cu propietatea (P): *oricum am numerota aceste puncte* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *linia frântă* $A_1A_2\ldots A_n$ *nu se autointersectează.* Găsiţi valoarea maximă a lui n.

D. Şerbănescu, România

3. Pe cercul circumscris $\triangle ABC$, arcele $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$ se consideră astfel încât $C \notin \overset{\frown}{AB}$, $A \notin \overset{\frown}{BC}$, $B \notin \overset{\frown}{CA}$ şi fie F, D, respectiv E mijloacele acestor arce. Notăm cu G, H punctele de intersecţie ale lui DE cu CB, respectiv CA şi cu I, J punctele de intersecţie ale lui DF cu BC, respectiv BA. Fie M, N mijloacele lui $[GH]$, respectiv $[IJ]$.

a) Găsiţi unghiurile $\triangle DMN$ funcţie de unghiurile $\triangle ABC$.

b) Dacă O este centrul cercului circumscris $\triangle DMN$ şi $\{P\} = AD \cap EF$, arătaţi că O, P, M şi N sunt conciclice.

Ch. Lozanov, Bulgaria

4. Fie $x, y, z \in (-1, \infty)$. Să se arate că $\dfrac{1+x^2}{1+y+z^2} + \dfrac{1+y^2}{1+z+x^2} + \dfrac{1+z^2}{1+x+y^2} \geq 2.$

L. Panaitopol, România

1. Soluţia redacţiei. Se constată uşor că

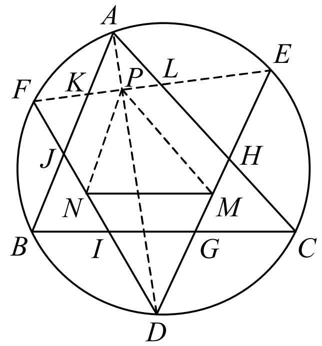
$$A + 2B + 4 = 4 \cdot \underbrace{\overline{11\ldots1}}_{2n} + 16 \cdot \underbrace{\overline{11\ldots1}}_{n} + 4 = 4 \cdot \frac{10^{2n}-1}{9} + 16 \cdot \frac{10^n - 1}{9} + 4 =$$

$$= \frac{4 \cdot 10^{2n} + 16 \cdot 10^n + 16}{9} = \left(\frac{2 \cdot 10^n + 4}{3}\right)^2 = \underbrace{\overline{66\ldots68}}_{n}{}^2.$$

2. Există mulţimi de 4 puncte cu proprietatea (P), de exemplu mulţimea vârfurilor unui patrulater concav. Vom arăta că nu există mulţimi cu $n \geq 5$ puncte satisfăcând (P). Să observăm că dacă printre cele n puncte există patru A, B, C, D astfel ca $ABCD$ să fie patrulater convex, cu renotarea $A_1 = A$, $A_2 = C$, $A_3 = B$, $A_4 = D$ am avea $[A_1A_2] \cap [A_3A_4] \neq \emptyset$, deci (P) nu ar avea loc. Arătăm că pentru $n \geq 5$, putem selecta 4 puncte care să fie vârfurile unui patrulater convex. Luăm arbitrar 5 puncte din mulţime şi considerăm închiderea lor convexă. Dacă aceasta nu este triunghi, problema este rezolvată. Dacă este triunghi, dreapta determinată de cele două puncte din interiorul lui taie exact două laturi ale triunghiului; fie A vârful comun al acestor două laturi. Cele patru puncte rămase determină un patrulater convex, ceea ce încheie soluţia.

3. *a*) Notăm $m(\widehat{A}) = m(\overset{\frown}{BD}) = m(\overset{\frown}{DC}) = \alpha$, $m(\widehat{B}) = m(\overset{\frown}{AE}) = m(\overset{\frown}{EC}) = \beta$, $m(\widehat{C}) = m(\overset{\frown}{AF}) = m(\overset{\frown}{FB}) = \gamma$. Atunci $m(\widehat{D}) = \dfrac{1}{2}(\beta + \gamma) = \dfrac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$. Analog, $m(\widehat{DEF}) = 90^\circ - \dfrac{\beta}{2}$, iar $m(\widehat{DFE}) = 90^\circ - \dfrac{\gamma}{2}$. Pe de altă parte, $m(\widehat{EHA}) =$

$= \dfrac{1}{2}\left[m(\overset{\frown}{AE}) + m(\overset{\frown}{CD})\right] = \dfrac{1}{2}\left[m(\overset{\frown}{CE}) + m(\overset{\frown}{BD})\right] =$ $= m(\widehat{CGE})$, deci $\widehat{CHG} \equiv \widehat{CGH}$, adică $\triangle CGH$ este isoscel. Cum CF este bisectoare, ea va fi mediană şi înălţime, prin urmare $M \in CF$ şi $m(\widehat{EMF}) = 90°$. Analog se arată că $m(\widehat{FNE}) = 90°$, deci patrulaterul $EMNF$ este inscriptibil şi atunci $m(\widehat{DMN}) =$ $= m(\widehat{DEF}) = 90° - \dfrac{\beta}{2}$, iar $m(\widehat{DMN}) = m(\widehat{DFE}) =$ $90° - \dfrac{\gamma}{2}$.



b) Fie $\{K\} = AB \cap EF$, $\{L\} = AC \cap EF$; ca la punctul *a)* se arată că $AP \perp KL$, $m(\widehat{FPN}) = m(\widehat{EPM}) = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$. Însă $m(\widehat{AKP}) = m(\widehat{ALP}) = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$, deci $AB \parallel PN$ şi $AC \parallel PM$, de unde $m(\widehat{MPN}) = m(\widehat{BAC}) = \alpha$. Avem că $\triangle DMN$ este ascuţitunghic (i. e. O este punct interior lui), iar $m(\widehat{MDN}) = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$ şi atunci $m(\widehat{MON}) = 180° - \alpha$. Urmează că $m(\widehat{MON}) + m(\widehat{MPN}) = 180°$, adică punctele O, P, M, N sunt conciclice.

4. Deoarece $y \leq \dfrac{1+y^2}{2}$ (cu egalitate pentru $y = 1$), avem că $\dfrac{1+x^2}{1+y+z^2} \geq$ $\geq \dfrac{2\left(1+x^2\right)}{2\left(1+z^2\right)+\left(1+y^2\right)}$. Scriind analoagele şi adunându-le, cu notaţiile $a = 1+x^2$, $b = 1+y^2$, $c = 1+z^2$, inegalitatea de demonstrat devine

$$\frac{a}{2c+b} + \frac{b}{2a+c} + \frac{c}{2b+a} \geq 1, \quad \forall a,b,c > 0. \qquad (*)$$

Pentru a demonstra $(*)$, folosind Cauchy-Schwarz şi binecunoscuta $a^2+b^2+c^2 \geq$ $\geq ab+bc+ac$, avem

$$\frac{a}{2c+b} + \frac{b}{2a+c} + \frac{c}{2b+a} = \frac{a^2}{2ac+ab} + \frac{b^2}{2ab+bc} + \frac{c^2}{2bc+ac} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3\left(ab+bc+ac\right)} \geq 1,$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $a = b = c$. Egalitatea în inegalitatea iniţială se atinge pentru $x = y = z = 1$.

Altfel, $(*)$ se poate demonstra renotând numitorii $A = 2c+b$, $B = 2a+c$, $C = 2b+a$; după calcule, se obţine

$$\frac{C}{A} + \frac{A}{B} + \frac{B}{C} + 4\left(\frac{B}{A} + \frac{C}{B} + \frac{A}{C}\right) \geq 15, \quad A,B,C > 0.$$

Este însă clar că $\dfrac{C}{A} + \dfrac{A}{B} + \dfrac{B}{C} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{C}{A} \cdot \dfrac{A}{B} \cdot \dfrac{B}{C}} = 3$ şi analoaga.

B. Probleme aflate în atenţia juriului - enunţuri

1. Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi, $p = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a}$, iar $q = \dfrac{a}{c} + \dfrac{c}{b} + \dfrac{b}{a}$. Să se arate că $|p-q| < 1$.

2. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ cu $a^2+b^2+c^2 = 1$. Să se arate că $ab+bc+ca-2\left(a+b+c\right) > -\dfrac{5}{2}$.

3. Fie $a, b, c \in \mathbb{Q}$ cu $\dfrac{1}{a+bc} + \dfrac{1}{b+ac} = \dfrac{1}{a+b}$. Arătaţi că $\sqrt{\dfrac{c-3}{c+1}} \in \mathbb{Q}$.

4. Fie $a, b, c \in \mathbb{N}$ lungimile laturilor unui triunghi neisoscel. Demonstraţi că $\left|ab^2 + bc^2 + ca^2 - a^2b - b^2a - c^2a\right| \geq 2$.

5. Fie $a, b, c \in (0, \infty)$ cu $ab + bc + ca = 3$. Arătaţi că $a + b + c \geq abc + 2$.

6. Demonstraţi că există mulţimi disjuncte $A = \{x, y, z\}$ şi $B = \{m, n, p\}$ de numere naturale mai mari ca 2003 astfel încât $x + y + z = m + n + p$ şi $x^2 + y^2 + z^2 = m^2 + n^2 + p^2$.

7. Numerele $1, 2, 3, \ldots, 2003$ sunt renotate $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2003}$. Definim $b_1 = a_1$, $b_2 = 2a_2$, $b_3 = 3a_3$, $\ldots$, $b_{2003} = 2003a_{2003}$ şi fie B cel mai mare dintre b_k, $k = \overline{1, 2003}$.

a) Dacă $a_1 = 2003$, $a_2 = 2002$, $\ldots$, $a_{2003} = 1$, găsiţi valoarea lui B.

b) Demonstraţi că $B \geq 1002^2$.

8. Fie $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Fiecare punct al planului este colorat în roşu sau albastru. Arătaţi că există cel puţin un triunghi echilateral de latură $m \in M$ cu vârfurile de aceeaşi culoare.

9. Există un patrulater convex pe care diagonalele să-l împartă în patru triunghiuri cu ariile numere prime distincte?

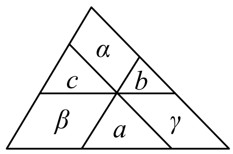
10. Există un triunghi cu aria 12 cm^2 şi perimetrul 12 cm?

11. Fie G centrul de greutate al $\triangle ABC$, iar A' simetricul lui A faţă de C. Să se arate că G, B, C, A' sunt conciclice dacă şi numai dacă $GA \perp GC$.

12. Trei cercuri egale au în comun un punct M şi se intersectează câte două în A, B, C. Demonstraţi că M este ortocentrul $\triangle ABC$[1].

13. Fie $\triangle ABC$ cu $AB = AC$. Un semicerc de diametru $[EF]$, cu $E, F \in [BC]$, este tangent laturilor AB şi AC în M, respectiv N, iar AE retaie semicercul în P. Demonstraţi că dreapta PF trece prin mijlocul coardei $[MN]$.

14. Paralelele la laturile unui triunghi duse printr-un punct interior împart interiorul triunghiului în 6 părţi cu ariile notate ca în figură. Demonstraţi că $\dfrac{a}{\alpha} + \dfrac{b}{\beta} + \dfrac{c}{\gamma} \geq \dfrac{3}{2}$.



Echipa României a fost condusă de prof. **Dan Brânzei**, asistat de prof. **Dinu Şerbănescu**. În clasamentul neoficial pe naţiuni, România a ocupat primul loc cu 205 puncte din 240 posibile, urmată de Bulgaria (182 puncte) şi Turcia (124 puncte); în continuare, s-au situat R. Moldova, Serbia, Macedonia, Grecia şi Ciprul. Componenţii echipei României au obţinut următoarele punctaje şi medalii (cu menţiunea că primii doi sunt singurii elevi care au realizat punctajul maxim!):

Dragoş Michnea (Baia Mare)	– 40 p	– Aur
Adrian Zahariuc (Bacău)	– 40 p	– Aur
Lucian Ţurea (Bucureşti)	– 38 p	– Aur
Cristian Tălău (Craiova)	– 37 p	– Aur
Sebastian Dumitrescu (Bucureşti)	– 29 p	– Argint
Beniamin Bogoşel (Arad)	– 21 p	– Bronz.

[1] Identificată drept problema piesei de 5 lei a lui Ţiţeica.