Problema 1. Numerele reale a, b, c, d satisfac simultan egalităţile

$$abc - d = 1,\ bcd - a = 2,\ cda - b = 3,\ dab - c = -6.$$

Arătaţi că $a + b + c + d \neq 0$.

Soluţie. Presupunem $a + b + c + d = 0$. Atunci

$$abc + bcd + cda + dab = 0. \tag{1}$$

Dacă $abcd = 0$, atunci unul dintre numere, să spunem d, trebuie să fie 0. În acest caz $abc = 0$, şi astfel cel puţin două dintre numerele a, b, c, d vor fi 0, contrazicând una din relaţiile date. Aşadar $abcd \neq 0$ şi, din (1),

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 0,$$

implicând

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}.$$

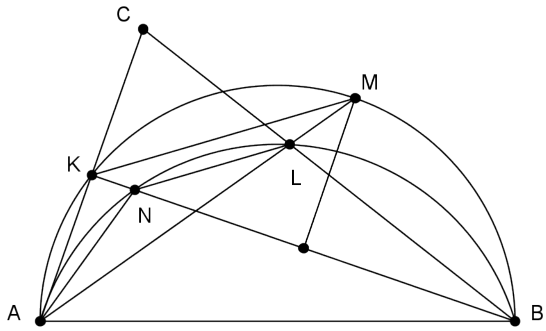
Rezultă că $(a + b)(b + c)(c + a) = 0$, ceea ce este imposibil (de exemplu, dacă $a + b = 0$, adunând a doua şi a treia din egalităţile date, am obţine $0 = 2 + 3$, contradicţie). Aşadar, $a + b + c + d \neq 0$.

Problema 2. Găsiţi toate numerele întregi n, $n \geqslant 1$, astfel încât $n \cdot 2^{n+1} + 1$ să fie pătrat perfect.

Soluţie. Răspuns: $n = 0$ şi $n = 3$.
Evident $n2^{n+1} + 1$ este impar, deci, dacă acest număr este pătrat perfect, atunci $n2^{n+1} + 1 = (2x + 1)^2$, $x \in \mathbb{N}$, de unde $n2^{n-1} = x(x + 1)$.
Numerele x şi $x+1$ sunt prime între ele, deci unul dintre ele trebuie să fie divizibil cu 2^{n-1}, ceea ce înseamnă că celălalt poate fi cel mult n. Asta arată că $2^{n-1} \leqslant n+1$.
O inducţie uşoară arată că inegalitatea de mai sus este falsă pentru orice $n \geqslant 4$, iar o verificare directă arată că singurele valori convenabile în cazul $n \leqslant 3$ sunt 0 şi 3.

Problema 3. Fie AL şi BK bisectoarele unghiurilor triunghiului neisoscel ABC (L aparţine laturii BC, K aparţine laturii AC). Mediatoarea segmentului BK intersectează dreapta AL în punctul M. Punctul N aparţine dreptei BK astfel încât dreapta LN să fie paralelă cu dreapta MK. Demonstraţi că $LN = NA$.

Soluţie. Punctul M se află pe cercul circumscris $\triangle ABK$ (căci AL şi mediatoarea lui BK trec prin mijlocul arcului BK al acestui cerc). Atunci $\angle CBK \equiv \angle ABK \equiv \angle AMK \equiv \angle NLA$. Aşadar $ABLN$ este inscriptibil, deci $\angle NAL \equiv \angle NBL \equiv \angle CBK \equiv \angle NLA$. Rezultă că $LN = NA$.



Problema 4. Un dreptunghi de tipul 9×7 este pavat cu două tipuri de piese ca cele de mai jos (piesele sunt compuse din trei, respectiv patru pătrate unitate, iar piesele de forma L pot fi rotite în mod repetat cu 90°).

Fie $n \geqslant 0$ numărul de piese de tipul 2×2 ce pot fi utilizate pentru o astfel de pavare. Găsiţi toate valorile pe care le poate avea n.

Soluţie. Răspuns: 0 şi 3.
Fie x numărul pieselor de tip L şi y numărul pieselor de tipul 2×2. Marcăm 20 de pătrate ale dreptunghiului, ca în figura de mai jos.

X		X		X		X		X
X		X		X		X		X
X		X		X		X		X
X		X		X		X		X

Evident, orice piesă acoperă cel mult un pătrat marcat.
Astfel, $x + y \geq 20\,(1)$ deci $3x + 3y \geq 60\,(2)$. Pe de altă parte, $3x + 4y = 63\,(3)$.
Din (2) şi (3) rezultă $y \leq 3$, iar din (3), $3 \mid y$.
Rezolvarea se încheie dacă producem pavări cu 3, respectiv 0, piese 2×2: