cu viteza constantă b cm/s de la I la P, iar M_3 cu viteza constantă a cm/s. Aflaţi ordinea în care ajung cele trei mobile în punctele A, P, respectiv D.

Claudiu Ştefan Popa

3. Se consideră în plan nouă puncte, astfel încât din oricare trei se pot alege cel puţin două cu distanţa dintre ele mai mică sau egală cu 1. Arătaţi că există un disc de rază 1 care conţine cel puţin 5 puncte din cele considerate.

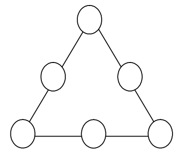
Gheorghe Blendea

Clasa a VIII-a

1. Pe tablă sunt scrise numerele $\sqrt{3}-1$, $\sqrt{3}+1$, 2. Se şterg cele trei numere şi se scriu în locul lor cele trei medii geometrice a câte două dintre numere. Se repetă procedeul cu noile numere. Este posibil ca după mai mulţi paşi pe tablă să fie scrise numerele:

a) $\sqrt{2\sqrt{3}-2}$, 2, $\sqrt{2\sqrt{3}+2}$; *b*) $2-\sqrt{3}$, $2+\sqrt{3}$, 4?

Monica Nedelcu



2. Triunghiul alăturat este considerat fix. În câte moduri putem aşeza numerele 1, 2, 3, 4, 5, 6 în cerculeţe, astfel încât suma numerelor de pe fiecare latură a triunghiului să fie aceeaşi?

Petru Asaftei

3. Există o ţară K a cubarzilor. Un cubard are corpul de forma unui cub, o antenă ce porneşte dintr-un vârf al cubului, o coadă ce este diagonală a unei feţe a cubului şi o gură care este exact la mijlocul unei muchii a cubului. Un cubard se poate rostogoli după voie, se poate umfla sau strânge dupa plac, îşi poate roti antena cum vrea. Nu există doi cubarzi pe care i-am putea suprapune încât sa le coincidă cozile, gurile şi antenele. Care este numărul maxim al cubarzilor?

Dan Brânzei

Olimpiada Balcanică de Matematică – Juniori (JMBO)

Ediţia a XI-a, Şumen (Bulgaria), 23-30 iunie 2007

La această ediţie a concursului au participat 11 ţări: *Albania*, *Bosnia & Herţegovina*, *Cipru*, *Macedonia*, *Grecia*, *Moldova*, *Muntenegru*, *România*, *Serbia*, *Turcia*, *Bulgaria 1* şi trei echipe în afara concursului: *Bulgaria 2*, *Kazahstan* şi *Şumen & Varna*.

Delegaţia României a fost condusă de prof. *Dinu Şerbănescu* şi prof. *Mircea Fianu*. Echipa ţării noastre a fost compusă din următorii elevi: **Chindea Filip** şi **Bumbacea Radu** (din Bucureşti) – medaliaţi cu aur (ambii au acumulat maximum de puncte), **Tiba Marius** (Iaşi), **Ciolan Emil Alexandru** (Slatina), **Muntean Alexandru** (Bucureşti) şi **Filip Laurian** (Arad) – medaliaţi cu argint.

Elevul Tiba Marius a fost primul din medaliaţii cu argint, printre toţi concurenţii ce au luat această medalie.

Se preconizează ca Albania să găzduiască următoarea ediţie a JMBO.

Enunţurile problemelor

1. Fie a un număr real pozitiv astfel încât $a^3 = 6(a+1)$. Să se arate că ecuaţia $x^2 + ax + a^2 - 6 = 0$ nu are soluţii reale.

2. Fie $ABCD$ un patrulater convex având $\angle DAC = \angle BDC = 36°$, $\angle CBD = 18°$ şi $\angle BAC = 72°$. Diagonalele AC şi BD se intersectează în punctul P. Să se determine măsura unghiului $\angle APD$.

3. Se consideră 50 de puncte în plan, oricare trei necolineare. Fiecare dintre aceste puncte este colorat folosind una dintre patru culori date. Să se arate că există o culoare şi cel puţin 130 de triunghiuri scalene cu vârfurile în puncte de această culoare.

4. Să se arate că dacă p este un număr prim, atunci $7p + 3^p - 4$ nu este pătrat perfect.

Notă. Timp de lucru: 4 ore şi 30 minute. Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.

Soluţiile problemelor

prezentate de elevul **Marius Tiba**

1. Observăm că $a^3 = 6(a+1) \Leftrightarrow a\left(a^2 - 6\right) = 6 \Leftrightarrow a^2 - 6 = \dfrac{6}{a}$ (a este pozitiv). Atunci, ecuaţia din enunţ se scrie sub forma

$$x^2 + ax + \frac{6}{a} = 0 \tag{1}$$

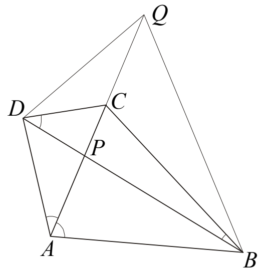
şi are discriminantul $D = a^2 - \dfrac{24}{a}$. Să presupunem, prin reducere la absurd, că ecuaţia dată sau ecuaţia (1) are soluţii reale. Acest fapt este echivalent cu condiţia $D \geq 0$. Avem

$$D \geq 0 \Leftrightarrow a^3 - 24 \geq 0 \Leftrightarrow 6(a+1) - 24 \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6(a-3) \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 3.$$

Atunci,

$$6 = a\left(a^2 - 6\right) \geq 3(9-6) = 9,$$

adică $6 \geq 9$, absurd.



2. Fie un punct Q pe dreapta AC ce respectă ordinea $A - C - Q$ şi este astfel încât $m(\widehat{CBQ}) = 18°$. Întrucât $\widehat{QAD} \equiv \widehat{QBD}$, patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil. Ca urmare, $m(\widehat{QDB}) = m(\widehat{QAB}) = 72°$. Deducem că $m(\widehat{QDC}) = 36° = m(\widehat{CDB})$. Aşadar, C este centrul cercului înscris în $\triangle DBQ$ şi, deci, $m(\widehat{DQP}) = \frac{1}{2} m(\widehat{DQB}) = 36°$. În sfârşit, $m(\widehat{APD}) = 108°$ (unghi exterior triunghiului PDQ).

3. Se constată uşor că există cel puţin 13 puncte colorate la fel (dacă de fiecare culoare ar exista cel mult 12 puncte colorate cu aceasta, atunci în plan am avea cel mult 48 puncte). Vom arăta că există 130 triunghiuri scalene cu vârfurile dintre aceste 13 puncte.

Într-adevăr, cu cele 13 puncte putem forma $13 \cdot 12 \cdot 11 : 6 = 286$ triunghiuri (în numărul celor $13 \cdot 12 \cdot 11$ triunghiuri, un triunghi este socotit de 6 ori). Observăm acum că, dacă considerăm un segment $[AB]$, există cel mult două puncte astfel încât $[AB]$ să fie bază de triunghi isoscel formate cu ele. Cum cu 13 puncte putem avea $\frac{13 \cdot 12}{2} = 78$ segmente, rezultă că există cel mult $78 \cdot 2 = 156$ triunghiuri isoscele. Ca urmare, există cel puţin $286 - 156 = 130$ triunghiuri scalene cu vârfurile în puncte de această culoare.

4. Dacă p este par, atunci $p = 2$ şi se verifică direct că numărul din enunţ nu-i pătrat perfect.

Dacă p este impar, atunci p este fie de forma $\mathcal{M}4+1$, fie $\mathcal{M}4+3$. În cazul în care $p = \mathcal{M}4+1$, rezultă că numărul $7p+3^p-4 = \mathcal{M}4+2$ (ultima cifră a lui 3^p fiind 3) şi nu este pătrat perfect. Dacă, însă, $p = \mathcal{M}4+3$, să notăm $k^2 = 7p+3^p-4$. Deducem imediat că $k^2 = \mathcal{M}p - 1$ (se utilizează mica teoremă a lui Fermat), echivalent cu $p \mid k^2 + 1$. De aici deducem că $p \mid 1$ (ştim că p prim şi $p \mid a^2 + b^2 \Rightarrow p \mid a$ şi $p \mid b$), ceea ce este absurd. Deci, nici în acest caz numărul din enunţ, nu-i pătrat perfect.