Olimpiada Balcanică de Matematică (juniori), 2004

Ediţia a VIII-a, Novi Sad (Serbia şi Muntenegru)

A. Problemele de concurs - enunţuri şi soluţii

1. Pentru $x, y \in \mathbb{R}$, nu simultan nule, să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{x+y}{x^2-xy+y^2} \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

2. Fie $\triangle ABC$ isoscel ($AC = BC$), M mijlocul segmentului $[AC]$, iar $[CH]$ înălţimea din C. Cercul ce trece prin B, C şi M intersectează a doua oară dreapta CH în Q. Să se afle raza cercului circumscris $\triangle ABC$ funcţie de $m = CQ$.

3. Fie $x, y \in \mathbb{N}$ astfel încât $3x + 4y$ şi $4x + 3y$ să fie ambele pătrate perfecte. Să se arate că numerele x şi y sunt multipli de 7.

4. Se consideră un poligon convex cu $n \geq 4$ vârfuri. Descompunem arbitrar poligonul în triunghiuri ale căror vârfuri sunt printre cele ale poligonului, astfel încât oricare două triunghiuri să nu aibă puncte interioare comune. Colorăm cu negru triunghiurile ce au două laturi care sunt şi laturi ale poligonului, cu roşu triunghiurile ce au exact o latură care este şi latură a poligonului, celelalte triunghiuri lăsându-le albe. Să se demonstreze că numărul triunghiurilor negre este cu 2 mai mare decât numărul triunghiurilor albe.

1. Observăm că cei doi numitori sunt întotdeauna pozitivi. Dacă $x + y < 0$, inegalitatea este evidentă (şi strictă). Dacă $x + y > 0$, se demonstrează imediat că

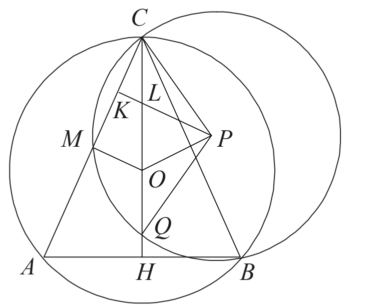
$$x + y \leq \sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}, \quad x^2 - xy + y^2 \geq \frac{x^2+y^2}{2},$$

prin urmare

$$\frac{x+y}{x^2-xy+y^2} \leq \frac{\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}}{\frac{x^2+y^2}{2}} \Leftrightarrow \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} \leq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Egalitate se atinge pentru $x = y > 0$.

2. Fie P şi O centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor BCM, respectiv ABC, K mijlocul lui $[CM]$, iar $\{L\} = CH \cap PK$. Evident că $O \in CH$ şi cum OM şi PK sunt perpendiculare pe AC, rezultă că $OM \parallel PK$. Urmează că LK este linie mijlocie în $\triangle CMO$, deci $CL = LO$.



Deoarece $OP \perp BC$, avem că $m(\widehat{LOP}) = 90^\circ - m(\widehat{OCB})$. Apoi, $m(\widehat{OLP}) = m(\widehat{CLK}) = 90^\circ - m(\widehat{OCA})$. Însă $\widehat{OCB} \equiv \widehat{OCA}$, deoarece înălţimea CH este bisectoare în $\triangle ABC$ isoscel, deci $\widehat{POL} \equiv \widehat{PLO}$ şi $PL = PO$. Observăm că $\triangle PCQ$ este isoscel cu $PC = PQ$, prin urmare va rezulta că $CL = OQ$.

În concluzie, $CL = LO = OQ$, deci $R = OC = \dfrac{2}{3}CQ = \dfrac{2}{3}m$.

3. Fie $m^2 = 3x + 4y$, $n^2 = 4x + 3y$; atunci $m^2 + n^2 = 7(x + y)$, deci $m^2 + n^2 \vdots 7$. Un pătrat perfect dă la împărţirea prin 7 unul din resturile 0, 1, 2, 4 şi atunci, pentru ca o sumă de pătrate perfecte să se dividă cu 7, trebuie ca fiecare în parte să se dividă cu 7. Însă, dacă $m^2 \vdots 7$, atunci $m^2 \vdots 7^2$ şi analog $n^2 \vdots 7^2$, adică $7(x+y) = m^2 + n^2 \vdots 49$, deci $x + y \vdots 7$. Urmează că $x = (4x + 3y) - 3(x + y) \vdots 7$, $y = (3x + 4y) - 3(x + y) \vdots 7$.

4. Notăm cu x, y, z numărul triunghiurilor colorate în negru, roşu, respectiv alb; atunci $x + y + z = n - 2$, acesta fiind numărul triunghiurilor din descompunerea poligonului. Deoarece fiecare latură a poligonului este latură a exact unui triunghi din descompunere, avem că $2x + y = n$. Combinând cele două relaţii, obţinem că $x - z = 2$, ceea ce trebuia să demonstrăm.

B. Probleme aflate în atenţia juriului - enunţuri

1. Fie $a, b, p, q \in \mathbb{N}^*$ cu $p, q \geq 3$, iar a, b relativ prime şi de parităţi diferite. Să se arate că numărul $N = 2a^p b - 2ab^q$ nu poate fi pătrat perfect.

2. Găsiţi toate numerele naturale A care se scriu cu patru cifre în baza 10, cu proprietatea că $\frac{1}{3}A + 2000 = \frac{2}{3}\overline{A}$. (Cu $\overline{A}$ am notat răsturnatul lui A).

3. Găsiţi toate numerele naturale $n \geq 3$ cu proprietatea că n divide $(n-2)!$.

4. Pentru $a, b, c \in [1, +\infty)$, demonstraţi inegalitatea

$$(1 + abc)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 3 + a + b + c.$$

5. Pentru $x, y, z \in \mathbb{R}$, demonstraţi inegalitatea

$$\frac{x^2 - y^2}{2x^2 + 1} + \frac{y^2 - z^2}{2y^2 + 1} + \frac{z^2 - x^2}{2z^2 + 1} \leq (x + y + z)^2.$$

6. Dacă $0 < \frac{a}{b} < b < 2a$, să se arate că

$$\frac{2ab - a^2}{7ab - 3b^2 - 2a^2} + \frac{2ab - b^2}{7ab - 3a^2 - 2b^2} \geq 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^2.$$

7. Două cercuri $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ sunt secante în A şi B. Un cerc $\mathcal{C}$ cu centrul în A taie $\mathcal{C}_1$ în M şi P, iar pe $\mathcal{C}_2$ în N şi Q, astfel încât N şi Q sunt situate de o parte şi de alta a dreptei MP, iar $AB > AM$. Să se demonstreze că $\widehat{MBQ} \equiv \widehat{NBP}$.

8. Fie E, F două puncte distincte în interiorul paralelogramului $ABCD$. Determinaţi numărul maxim posibil de triunghiuri având aceeaşi arie, cu vârfurile în trei dintre punctele A, B, C, D, E, F.

9. Fie $\triangle ABC$ înscris în cercul $\mathcal{C}$. Cercurile $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ sunt tangente interior cercului $\mathcal{C}$ în punctele A_1, B_1, respectiv C_1 şi tangente laturilor $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ în punctele A_2, B_2, respectiv C_2, astfel încât A, A_1 sunt de o parte şi de alta a lui BC etc. Dreptele A_1A_2, B_1B_2 şi C_1C_2 intersectează a doua oară cercul $\mathcal{C}$ în punctele A', B', respectiv C'. Dacă $\{M\} = BB' \cap CC'$, demonstraţi că $m(\widehat{MAA'}) = 90°$.

10. Fie $\triangle ABC$ cu $m(\widehat{C}) = 90°$ şi punctele $D \in [AC]$, $E \in [BC]$. Spre interiorul triunghiului construim semicercurile $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$ de diametre $[AC]$, $[BC]$, $[CD]$, respectiv $[CE]$ şi fie $\{C, K\} = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$, $\{C, M\} = \mathcal{C}_3 \cap \mathcal{C}_4$, $\{C, L\} = \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3$, $\{C, N\} = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_4$. Arătaţi că punctele K, L, M, N sunt conciclice.

11. Pe o tablă dreptunghiulară cu m linii şi n coloane, în fiecare căsuţă se află scris semnul "−". Putem efectua următoarele operaţii:

(i) schimbarea tuturor semnelor de pe o linie (din "+" în "−", iar din "−" în "+");

(ii) schimbarea tuturor semnelor de pe o coloană.

a) Dacă $m = n = 100$, arătaţi că nu putem obţine 2004 semne "+" utilizând de un număr finit de ori operaţiile descrise;

b) Dacă $m = 100$, găsiţi cea mai mică valoare a lui $n > 100$ pentru care putem obţine 2004 semne "+".

(continuarea tabelului din p. 113)

148. PRECUPANU Codrin	Colegiul "C. Negruzzi", Iaşi
149. DUREA Magdalena	Şcoala "T. Maiorescu", Iaşi
150. BURGHELEA Diana	Şcoala "T. Maiorescu", Iaşi
151. FARCAŞ Marius	Şcoala "T. Maiorescu", Iaşi
152. BAGHIU Ciprian	Liceul "D. Cantemir", Iaşi
153. ION Elena	Liceul "G. Ibrăileanu", Iaşi
154. BUCESCU Dominic	Şcoala "I. Creangă", Iaşi
155. PAŞA Narcisa	Liceul de artă, Iaşi
156. SUFIŢCHI Viorica	Şcoala gen. nr. 26, Iaşi
157. POPA Gabriela	Şcoala gen. nr. 43, Iaşi
158. RUSU Virginia	Liceul "M. Costin", Iaşi
159. DĂSCĂLESCU Diana	Liceul "M. Eminescu", Iaşi
160. GHERGHELAŞ Liliana	Gr. şc. "Victoria", Iaşi
161. FERENŢ Olimpia	Gr. şc. "Victoria", Iaşi
162. LEONTIEŞ Rodica	Liceul "Al. I. Cuza", Iaşi
163. PANAINTE Ecaterina Bronia	Şcoala "Gh. I. Brătianu", Iaşi
164. POPA Dumitru	Şcoala "Şt. Bârsănescu", Iaşi
165. CĂRBUNE Ioan	Liceul "I. Neculce", Tg. Frumos
166. BREŞUG Constantin	Liceul "I. Neculce", Tg. Frumos
167. CĂILEANU Sorin	Liceul "I. Neculce", Tg. Frumos
168. DOCA Laurenţia	Liceul "I. Neculce", Tg. Frumos
169. BRÂNZILĂ Cristina	Liceul "D. Cantemir", Iaşi
170. PLĂEŞU Dan	Şcoala normală "V. Lupu", Iaşi
171. CONŢU Valentin	Şcoala "I. Cantacuzino", Paşcani
172. OLENIUC Mariana	Gr. şc. "D. Mangeron", Iaşi
173. ROMILĂ Amalia - Patricia	Şcoala normală "V. Lupu", Iaşi
174. GRĂDINARU Daniela	Gr. şc. "A. Saligny", Iaşi
175. ARBONE Ion	informatician
176. NECHITA Remus	Liceul "M. Costin", Iaşi
177. BUJOR Lorena	Şcoala "I. Teodoreanu", Iaşi

(continuare la p. 165)