A 8-A OLIMPIADĂ BALCANICĂ DE MATEMATICĂ PENTRU JUNIORI

Serbia şi Muntenegru, 26 iunie-1 iulie 2004

prezentare de **Dinu Şerbănescu**

Această olimpiadă a fost găzduită de oraşul Novi Sad. Elevilor li s-a propus spre rezolvare patru probleme, într-un interval de patru ore şi jumătate. Prezentăm în continuare problemele şi soluţiile acestora.

Enunţuri

1. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{x+y}{x^2-xy+y^2} \le \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

pentru orice numere reale x şi y, nu simultan nule.

Albania

2. Fie ABC un triunghi isoscel cu $AC=BC$, M mijlocul segmentului AC şi ℓ dreapta ce trece prin C şi este perpendiculară pe AB. Cercul ce trece prin punctele B, C şi M intersectează dreapta ℓ în punctele C şi Q. Să se afle raza cercului circumscris triunghiului ABC în funcţie de $m=CQ$.

Bulgaria

3. Se consideră numerele naturale nenule x şi y, astfel încât $3x+4y$ şi $4x+3y$ sunt ambele pătrate perfecte. Să se arate că numerele x şi y sunt ambele divizibile cu 7.

Grecia

4. Se consideră un poligon convex având n vârfuri, $n \ge 4$. Descompunem arbitrar poligonul în triunghiuri ale căror vârfuri sunt printre vârfurile poligonului, astfel încât orice două triunghiuri să nu aibă puncte interioare comune. Colorăm cu negru triunghiurile ce au două laturi care sunt şi laturi ale poligonului, cu roşu triunghiurile ce au exact o latură care este şi latură a poligonului şi cu alb triunghiurile ale căror laturi nu sunt laturi ale poligonului. Să se demonstreze că numărul triunghiurilor negre este cu 2 mai mare decât numărul triunghiurilor albe.

România, *Călin Popescu*

Soluţii

1. Observăm că $x^2 - xy + y^2 = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + (x-y)^2\right) > 0$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$, nu simultan nule.

Soluţia 1. Dacă $x + y < 0$, inegalitatea este evidentă. Dacă $x + y > 0$, inegalitatea este echivalentă cu:

$$(x+y)\sqrt{x^2+y^2} \leq 2\sqrt{2}\left(x^2 - xy + y^2\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+y)^2(x^2+y^2) \leq 8\left(x^2 - xy + y^2\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^4 + 2x^3y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + y^4 \leq 8x^4 - 16x^3y + 24x^2y^2 - 16xy^3 + 8y^4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq 7x^4 - 18x^3y + 22x^2y^2 - 18xy^3 + 7y^4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq (x-y)^2(7x^2 - 4xy + 7y^2) = (x-y)^2\left(2(x-y)^2 + 5x^2 + 5y^2\right),$$

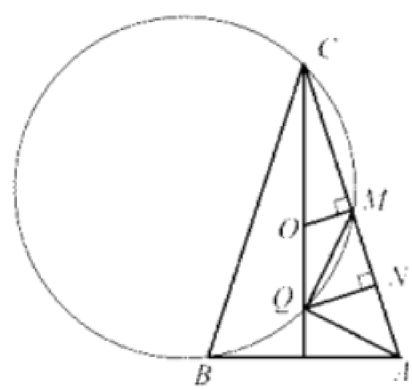
ceea ce este evident.

Soluţia 2. Inegalităţile evidente:

$$x + y \leq \sqrt{2(x^2+y^2)} \quad \text{şi} \quad x^2 - xy + y^2 \geq \frac{x^2+y^2}{2}$$

dau, prin împărţire, cerinţa.

2. Dreapta ℓ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ACB$, deci Q este mijlocul arcului $\overset{\frown}{BM}$ şi $QB = QM$. În plus, ℓ este mediatoarea segmentului AB, adică $QB = QA$ şi Q este centrul cercului circumscris triunghiului ABM. Fie N mijlocul segmentului AM şi O centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Atunci $O \in \ell$, $OM \perp AC$ şi $QN \perp AC$; din teorema lui *Thales* rezultă: $\dfrac{OC}{CQ} = \dfrac{CM}{CN} = \dfrac{2}{3}$.



În concluzie, raza cercului circumscris triunghiului ABC este $\dfrac{2}{3}m$.

3. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $3x + 4y = m^2$ şi $4x + 3y = n^2$. Atunci $7(x+y) = m^2 + n^2$, de unde $7 \mid m^2 + n^2$. Pătratele perfecte dau la împărţirea cu 7 resturile 0, 1, 2 sau 4; prin simple calcule rezultă că $7 \mid m^2 + n^2$ implică $7 \mid m$ şi $7 \mid n$. Urmează $49 \mid m^2 + n^2 = 7(x+y)$, de unde $7 \mid x + y$, (1).

Pe de altă parte $7 \mid m^2 - n^2 = y - x$, deci $7 \mid 2y = (x+y) + (y-x)$. Cum $(7, 2) = 1$, avem $7 \mid y$ şi apoi $7 \mid x = (x+y) - y$, ceea ce trebuia demonstrat.

4. *Soluţia* 1. Notăm cu N, A, R numărul triunghiurilor negre, albe şi roşii. Vom arăta că numărul m al triunghiurilor din descompunere este $n-2$. Într-adevăr, suma unghiurilor poligonului este $(n-2)\cdot 180^\circ$, iar suma unghiurilor celor m triunghiuri din descompunere este $m\cdot 180^\circ$; rezultă $m=n-2$ şi

$$N+R+A=n-2. \tag{1}$$

Pe de altă parte, fiecare din cele n laturi sunt laturi ale exact unui triunghi al descompunerii, iar acest triunghi este negru sau roşu. Cum un triunghi negru are două laturi care sunt şi laturi ale poligonului, iar un triunghi roşu are exact o latură care este şi latură a poligonului, avem:

$$2N+R=n. \tag{2}$$

Scăzând relaţiile (1) şi (2) rezultă $N-A=2$, ceea ce trebuia demonstrat.

Soluţia 2, redactată după soluţia elevei *Livia Ilie*. Demonstrăm prin inducţie după $n\geq 4$. În cazul $n=4$, o descompunere a unui patrulater crează 2 triunghiuri negre şi nu avem triunghiuri albe şi roşii. Ipoteza este deci verificată. Pentru a demonstra pasul de inducţie, considerăm o diagonală arbitrară d a descompunerii şi observăm că poligonul P cu n vârfuri este descompus în două poligoane P_1 şi P_2, având fiecare cel mult $n-1$ vârfuri. Dacă unul dintre poligoane, de exemplu P_1, este triunghi, atunci aceta este negru şi în P şi în P_1. Dacă ambele poligoane P_1 şi P_2, au cel puţin 4 laturi, considerăm triunghiul T din descompunerea lui P_1, care are pe d ca latură. Observăm că T nu poate avea în P culoarea neagră. Dacă în P triunghiul T era de culoare roşie, atunci în P_1 el are culoarea neagră. Dacă în P triunghiul T era alb, atunci în P_1 el va fi roşu. Conform ipotezei de inducţie, în P_1 numărul de triunghiuri negre este cu 2 mai mare decât cel al triunghiurilor albe. Atunci în P_1 vom avea, conform colorării din P exact un triunghi negru în plus faţă de cele albe. Acelaşi rezultat îl obţinem analog pentru P_2 şi prin sumare rezultă concluzia.

Comentariu

Echipa României a fost formată din elevii *Ilie Livia* București, *Munteanu Sânziana* Ploiești, *Dumitrescu Mihail-Eugen* București, *Persu Mădălina Elena* Drăgășani, *Goșea Ion Victor* Craiova, *Hurmuz Daniel* Botoșani și condusă de profesorii *Dinu Șerbănescu* și *Mircea Fianu*. Rezultatele elevilor noștri au fost excepționale, primii patru obținând medaliile de aur cu punctajul maxim 40, iar ceilalți doi medalii de argint, cu 39, respectiv 38 de puncte.

Semnalăm că pentru prima dată la această competiție au participat toate cele 10 țări balcanice, România devansându-le în clasamentul pe națiuni cu 237 de puncte din 240. În continuare s-au clasat Bulgaria (219), Serbia și Muntenegru (187), Turcia (176), Moldova (163), Grecia (148), Macedonia (140), Bosnia și Herțegovina (116) urmate de Cipru și Albania.

În încheiere, aducem mulțumiri tuturor profesorilor ce au contribuit la obținerea celui de al treilea succes consecutiv al juniorilor români la acest concurs.

Profesor, Colegiul „Sf. Sava",
București