SHORT LIST 2013, GEOMETRIE

G.1. Fie $[AB]$ diametrul unui cerc ω cu centrul O, OC o rază a lui ω perpendiculară pe AB, iar M un punct al segmentului (OC). Fie N al doilea punct de intersecţie al dreptei AM cu ω, iar P punctul de intersecţie al tangentelor în N şi B la ω. Demonstraţi că punctele M, O, P, N sunt conciclice. (Albania)

G.2. ω_1 şi ω_2 sunt două cercuri tangente exterior în punctul M şi tangente interior la un cerc ω_3 în punctele K şi respectiv L. Fie A şi B punctele în care tangenta comună în M la ω_1 şi ω_2 intersectează ω_3. Arătaţi că dacă $\sphericalangle KAB \equiv \sphericalangle LAB$, atunci $[AB]$ este diametru al lui ω_3. (Cipru)

G.3. Fie D un punct pe latura BC a unui triunghi ascuţitunghic ABC astfel încât $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAO$, unde O este centrul cercului ω, circumscris triunghiului ABC. Fie E al doilea punct de intersecţie a dreptei AD cu ω, iar M, N, P mijloacele segmentelor $[BE]$, $[OD]$, respectiv $[AC]$. Demonstraţi că M, N, P sunt coliniare. (Macedonia)

G.4. Fie I centrul cercului înscris, iar AB cea mai scurtă latură a triunghiului ABC. Cercul cu centrul în I care trece prin C intersectează semidreapta $(AB$ în P, iar semidreapta $(BA$ în Q. Fie D punctul de tangenţă al cercului exînscris triunghiului ABC corespunzător unghiului A cu latura BC şi fie E simetricul punctului C în raport cu D. Arătaţi că dreptele PE şi CQ sunt perpendiculare. (Bosnia şi Herţegovina)

G.5. Un cerc care trece prin mijlocul M al laturii BC şi vârful A al unui triunghi ABC intersectează laturile (AB) şi (AC) pentru a doua oară în punctele P şi respectiv Q. Arătaţi că dacă $m(\sphericalangle BAC) = 60^\circ$, atunci $AP + AQ + PQ < AB + AC + \frac{1}{2} BC$. (Bulgaria)

G.6. Fie P şi Q mijloacele laturilor (BC), respectiv (CD) unui dreptunghi $ABCD$. Fie K şi M punctele de intersecţie ale dreptei PD cu QB şi respectiv QA, iar N punctul de intersecţie a dreptelor PA şi QB.
Fie X, Y, Z mijloacele segmentelor $[AN]$, $[KN]$, respectiv $[AM]$. Fie ℓ_1 dreapta care trece prin X şi este perpendiculară pe MK, ℓ_2 dreapta care trece prin Y şi este perpendiculară pe AM, ℓ_3 dreapta care trece prin Z şi este perpendiculară pe KN. Arătaţi că dreptele ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 sunt concurente. (Cipru)