PROBLEMA LUI FROBENIUS

lecţie ţinută de Andrei Eckstein,
tabăra Gazeta Matematică şi ViitoriOlimpici.ro, Câmpulung, 19 august 2014

TEORIE:

Fie $a, b \in \mathbb{N}$, $(a, b) = 1$. Se pune problema determinării mulţimii ,,francaturilor", adică a elementelor mulţimii $F = \{ma + nb \mid m, n \in \mathbb{N}\}$. Numerele naturale care nu aparţin mulţimii F le vom numi ,,non-francaturi".
Denumirea provine de la faptul că problema poate fi reformulată astfel: dispunând de o cantitate nelimitată de timbre de valori a şi b şi loc infinit pe plic, ce valori pot totaliza timbrele puse pe plic?

Teorema 1: $\forall\, t \in \mathbb{N},\ \exists m, n \in \mathbb{Z}:\ t = ma + nb$.
(*Demonstraţie:* refăcând în sens invers paşii algoritmului lui Euclid)

Observaţie: $t = ma + nb \Rightarrow t = (m + kb)a + (n - ka)b, \forall\, k \in \mathbb{Z}$
Mai mult, dacă $(m_0, n_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ este o soluţie oarecare a ecuaţiei $t = am + bn$, atunci mulţimea soluţiilor este $\{(m_0 + kb,\ n_0 - ka) \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Teorema 2: $\forall\, t \in \mathbb{N},\ \exists!(m_t, n_t) \in \{0, 1, \ldots, b-1\} \times \mathbb{Z}:\ t = m_t a + n_t b$.
(scrierea ,,canonică")

Teorema 3: $t \in F \Leftrightarrow n_t \geq 0$

Teorema 4: $t > a(b-1) + (-1)b = ab - a - b \Rightarrow t \in F$

Teorema 5: $ab - a - b$ este cea mai mare non-francatură.
Dintre numerele $0, 1, \ldots, ab - a - b$ exact jumătate sunt francaturi.
Mai mult, dintre numerele k şi $ab - a - b - k$ $(k = 0, 1, \ldots, ab - a - b)$, exact unul este francatură.
Demonstraţie: Dacă avem $k = m_k a + n_k b$ este scrierea canonică a lui k, atunci $ab - a - b - k = (b - 1 - m_k)a + (-n_k - 1)b$. Cum $b - 1 - m_k \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$, deducem că aceasta este scrierea ,,canonică". Evident, dintre numerele n_t şi $-1 - n_k$, exact unul este natural.

Probleme similare se pot considera şi pentru mai mult de două valori a, b. De exemplu, pentru 3 numere, forma cea mai cunoscută a problemei este următoarea:

The Chicken McNuggets Problem. La McDonald's se pot comanda Chicken McNuggets în cutii de 6, 9 şi 20. Care este cel mai mare număr de nuggets pe care nu îl poţi primi indiferent de combinaţia de cutii pe care le comanzi? [1]

În general, pentru n numere, problema îi este atribuită lui Frobenius şi are următorul enunţ:

---

[1] În realitate, prin introducerea pachetului cu 4 nuggets, datele problemei s-au schimat. Care este răspunsul la noua problemă?

Problema lui Frobenius. Fiind date numerele naturale nenule $x_1, x_2, \ldots, x_n$, cu c.m.m.d.c.$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$, aflaţi cel mai mare număr natural care nu se scrie ca $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ cu $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$.

Observaţie: Ce se întâmplă dacă $d =$ c.m.m.d.c.$(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 1$? Este evident că $t = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ va fi multiplu de d oricare ar fi $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$. Notând $\frac{x_j}{d} = y_j$, c.m.m.d.c.$(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 1$ şi problema revine la a-l scrie pe $\frac{t}{d} = a_1y_1 + a_2y_2 + \ldots + a_ny_n$, adică se reduce la problema lui Frobenius. Practic, am schimbat doar ,,unitatea de măsură" (în loc de 1 am luat d).

APLICAŢII

1. Pentru ce numere naturale n există numere naturale x şi y astfel încât $n = 4x + 5y$? Justificaţi răspunsul.

Soluţia 1: O aplicaţie imediată a teoriei de mai sus: mai întâi convin toate numerele mai mari ca $4 \cdot 5 - 4 - 5 = 11$; apoi, dintre numerele de la 0 la 11, exact jumătate se scriu. Acestea sunt: $0 = 0 \cdot 4 + 0 \cdot 5$, $4 = 1 \cdot 4 + 0 \cdot 5$, $5 = 0 \cdot 4 + 1 \cdot 5$, $8 = 2 \cdot 4 + 0 \cdot 5$, $9 = 1 \cdot 4 + 1 \cdot 5$ şi $10 = 0 \cdot 4 + 2 \cdot 5$.

Soluţia 2: În situaţii concrete se poate imagina şi o tratare pe cazuri: orice număr de forma $4k = k \cdot 4 + 0 \cdot 5$ se scrie sub forma dorită; numerele de forma $4k+1 = (k-1) \cdot 4 + 1 \cdot 5$ se scriu sub această formă dacă $k \neq 0$; numerele de forma $4k + 2 = (k-2) \cdot 4 + 2 \cdot 5$ se scriu sub forma $4x + 5y$ dacă $k \geq 2$; în fine, numerele de forma $4k + 3 = (k-3) \cdot 4 + 3 \cdot 5$ sunt de forma dorită pentru $k \geq 3$. Singurele numere care nu au proprietatea din enunţ sunt aşadar $1; 2, 6; 3, 7, 11$.

2. Care sunt numerele naturale care nu se scriu sub forma $12a + 15b$, $a, b \in \mathbb{N}$?

Răspuns: Nu putem aplica orbeşte teoria pentru că numerele $a = 12$ şi $b = 15$ au c.m.m.d.c.$(a, b) = 3$. Mai întâi, toate numerele care nu sunt divizibile cu 3 nu au o asemenea reprezentare. Să vedem care sunt multiplii lui 3 care nu se scriu sub această formă. $3x = 12a + 15b$ revine la $x = 4a + 5b$, adică , aşa cum am văzut la problema precedentă, $x \in \{1, 2, 3, 6, 7, 11\}$, deci $3x \in \{3, 6, 9, 18, 21, 33\}$.

3. Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$, $(a, b) = 1$. Câte numere nu se scriu sub forma $ma+nb$, $m, n \in \mathbb{N}^*$?

Soluţia 1: Mai întâi convin toate non-francaturile, în număr de $\frac{(a-1)(b-1)}{2}$. Dintre francaturi, avem numerele de forma $0a + nb$ cu $n \in \{0, 1, \ldots, a\}$ şi cele de forma $ma + 0b$ cu $m \in \{0, 1, \ldots, b\}$. Numerele 0 şi ab fiind considerate de câte două ori, totalul este $\frac{(a-1)(b-1)}{2} + a + b = \frac{(a+1)(b+1)}{2}$.

Soluţia 2: Vom demonstra că $t \in F^* = \{ma + nb \mid m, n \in \mathbb{N}^*\} \Leftrightarrow t - a - b \in F$.
Afirmaţia este ca şi evidentă dacă ne gândim la pusul timbrelor pe plic.
Dacă $t \in F^*$ atunci $t = ma + nb$, $m, n \in \mathbb{N}^*$, deci $t - a - b = (m-1)a + (n-1)b$, cu $m - 1,\ n - 1 \in \mathbb{N}$, adică $t - a - b \in F$.
Reciproc, dacă $t - a - b \in F$, atunci $t - a - b = ma + nb$, $m, n \in \mathbb{N}$, deci $t = (m+1)a + (n+1)b$, cu $m + 1,\ n + 1 \in \mathbb{N}^*$, adică $t \in F^*$.

În concluzie, $t \notin F^* \Leftrightarrow t-a-b \notin F \Leftrightarrow t-a-b<0$ sau $t-a-b$ e non-francatură. Avem $a+b+\frac{(a-1)(b-1)}{2}=\frac{(a+1)(b+1)}{2}$ asemenea numere.

4. Avem un număr nelimitat de timbre în valoare de 134, 135, ..., 142 şi 143 cenţi. Determinaţi cea mai mare valoare (în cenţi) care nu poate fi reprezentată cu aceste timbre.

Gerhard Wöginger, Olimpiadă Austria, 2009

Soluţie: Cu n timbre putem reprezenta orice număr natural din intervalul $[134n,\ 143n]$. Numerele din intervalele $(143n,\ 134(n+1))$ nu pot fi reprezentate. Aceste intervale sunt nevide dacă $143n < 134(n+1)$ adică $9n < 134$. Cel mai mare asemenea n este $n = 14$ pentru care intervalul este $(2002,\ 2010)$, deci cea mai mare valoare care nu poate fi reprezentată este 2009.

5. Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$, $(a, b) = 1$. Câte numere se scriu în mod unic sub forma $ma + nb$, $m, n \in \mathbb{N}$?

Soluţie: Fie t un număr care se scrie în mod unic sub forma $ma+nb$. Considerăm scrierea canonică a lui $t = m_t a + n_t b$, cu $m_t \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$. Am văzut că, pentru ca t să fie francatură, este necesar ca $n_t \in \mathbb{N}$. Din unicitate rezultă că $t = (m_t + b)a + (n_t - a)b$ nu mai este o reprezentare convenabilă a lui t, deci $n_t - a < 0$. Aşadar $n_t \in \{0, 1, \ldots, a-1\}$. Este evident că orice număr t de forma $t = m_t a + n_t b$ cu $m_t \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ şi $n_t \in \{0, 1, \ldots, a-1\}$ are proprietatea din enunţ. Sunt în total ab asemenea numere.

6. Fie a, b două numere naturale nenule, prime între ele şi k un număr natural. Spunem că un număr natural n este *k-reprezentabil* dacă ecuaţia $ax + by = n$ are exact k soluţii $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Arătaţi că cel mai mare număr k-reprezentabil este $g_k(a, b) = (k+1)ab - a - b$, iar, pentru $k \geq 1$, cel mai mic număr k-reprezentabil este $ab(k-1)$. În plus, pentru $k \geq 1$, există ab numere k-reprezentabile.

Observaţie: t este k-reprezentabil $\Leftrightarrow$ $t + ab$ este $(k+1)$-reprezentabil $(k \geq 1)$

Soluţie: Dacă scrierea canonică a lui t este $t = m_t a + n_t b$, soluţiile ecuaţiei $ma+nb = t$ sunt (m_t, n_t), $(m_t+b,\ n_t-a)$, $(m_t+2b,\ n_t-2a), \ldots, (m_t+jb,\ n_t-ja)$ unde $j = \left[\frac{n_t}{a}\right]$ ($j+1$ soluţii). Aşadar t este k-reprezentabil dacă şi numai dacă $k = j+1 = \left[\frac{n_t}{a}\right]+1$. Atunci $t+ab$ are reprezentarea canonică $t+ab = m_t a+(n_t+a)b$, deci ecuaţia $t + ab = ma + nb$ va avea $\left[\frac{n_t+a}{a}\right] + 1 = \left[\frac{n_t}{a}\right] + 2 = k+1$ soluţii, deci $t + ab$ este $(k+1)$-reprezentabil.
Aşadar observaţia este demonstrată. Din ea rezultă imediat că $g_{k+1}(a, b) = ab + g_k(a, b)$ şi, cum $g_1(a, b) = (b-1)a + (a-1)b = 2ab - a - b$, rezultă $g_k(a, b) = (k+1)ab - a - b$, $\forall\, k \geq 1$. Ştim că formula e valabilă şi pentru $k = 0$.
Analog, notând cu $h_k(a, b)$ cel mai mic număr k-reprezentabil, avem $h_1(a, b) = 0$ şi $h_{k+1}(a, b) = ab + h_k(a, b)$, de unde $h_k(a, b) = ab(k-1)$.

7. Fie a, b şi c numere naturale, oricare două fiind prime între ele. Arătaţi că $2abc - ab - bc - ca$ este cel mai mare număr natural care nu se poate scrie sub forma $xbc + yca + zab$, unde x, y şi z sunt numere naturale.

OIM 1983, problema 3

Soluţie: Să arătăm mai întâi că $2abc-ab-bc-ca$ nu se poate scrie sub forma dată. Presupunând contrariul, ar exista $x,y,z\in\mathbb{N}$ astfel încât $2abc-ab-bc-ca=xbc+yca+zab$, adică $2abc=(x+1)bc+(y+1)ca+(z+1)ab$. Atunci a divide $(x+1)bc$, deci a divide $x+1$. Cum $x+1>0$, rezultă $x+1\geq a$. Analog, $y+1\geq b$, $z+1\geq c$, deci $2abc=(x+1)bc+(y+1)ca+(z+1)ab\geq 3abc$, contradicţie.
Arătăm acum că orice număr mai mare ca $2abc-bc-ca-ab$ se scrie sub forma dată. Fie $t>2abc-bc-ca-ab$. Cum $(a,bc)=1$ şi $t>a\cdot bc-a-bc$, putem scrie $t=m_tbc+n_ta$, cu $m_t\in\{0,1,\ldots,a-1\}$. Atunci $n_ta=t-m_tbc>2abc-bc-ca-ab-(a-1)bc=abc-ab-ac$, deci $n_t>bc-b-c$. Rezultă că există $u,v\in\mathbb{N}$ astfel ca $n_t=bu+cv$. Alegând $x=m_t$, $y=v$, $z=u$ obţinem concluzia.

8. Se consideră a, b, c numere naturale nenule prime două câte două. Notăm cu $g_0(a,b,c)$ cel mai mare număr natural care nu poate fi reprezentat sub forma $xa+yb+zc$ cu $x,\ y,\ z\in\mathbb{N}^*$. Demonstraţi că $g_0(a,b,c)\geq\sqrt{2abc}$.

M. Ivanov, Olimpiada Tuymaada, 2014

Remarcă: Se poate arăta chiar că $g_0(a,b,c)\geq\sqrt{3abc}$.

Soluţie: (Dan Schwarz, pe baza soluţiei oficiale)
Să considerăm primele c numere întregi mai mari sau egale cu $\sqrt{2abc}$. Presupunem că fiecare dintre ele se poate scrie sub forma $xa+yb+zc$, cu x,y,z numere întregi strict pozitive. Fiecărui număr îi asociem punctul de coordonate (x,y) (coeficienţii lui a, respectiv b). Deoarece numerele considerate diferă unele de altele prin mai puţin de c, aceste puncte vor fi distincte. Pe de altă parte, aceste puncte se situează în interiorul triunghiului determinat de axele Ox, Oy şi dreapta $xa+yb=\sqrt{2abc}$, (căci $y>0$, $x>0$ şi $ax+by+zc<\sqrt{2abc}+c$) a cărui arie este c. (Este un triunghi dreptunghic cu catetele $\sqrt{\frac{2bc}{a}}$ şi $\sqrt{\frac{2ac}{b}}$.) Numărul punctelor de coordonate întregi strict pozitive din interiorul acestui triunghi este însă mai mic decât c (de exemplu din teorema lui Pick), deci unele puncte trebuie să coincidă, contradicţie.

PROBLEME PROPUSE:

1. Pe tablă s-a scris de douăzeci şi trei de ori numărul 13 şi de treisprezece ori numărul 23. Câte numere trebuie şterse de pe tablă pentru ca suma numerelor rămase să fie 464?

Emilia Cârstoiu, Rm. Vâlcea (Conc. Mathematica - modus vivendi), clasa a IV-a

2. Într-un anumit oraş european există numai abonamente pe 7 şi pe 30 de zile pe transportul în comun. Primul costă 7,03 euro, cel de-al doilea 30 de euro. Aina Algebrista vrea să cumpere de pe-acum abonamentele care să îi permită să călătorească folosind trasportul în comun vreme de 3 ani întregi, 2014-2016, 1096 de zile în total. Care este cea mai ieftină soluţie?

Olimpiadă Finlanda, 2013

3. (pentru cine ştie deja inducţie)
Unde este greşeala? (poveste adevărată, scrisă de un copil pe un forum):
,,Trebuie să demonstrez că orice taxă poştală mai mare sau egală cu 54 poate fi realizată folosind numai timbre în valoare de 7 şi 10 cenţi. Cartea îmi spune să folosesc ,,inducţie tare".

Verificarea: $54 = 4 \cdot 10 + 2 \cdot 7$.

Pasul meu de inducţie este:

Presupunem că $n = 10 \cdot j + 7 \cdot k$ pentru un anumit $n \geq 54$, unde j, k sunt numere naturale. Atunci $n + 1 = 10(j - 2) + 7(k + 3)$.

Astfel (din câte îmi dau eu seama) am arătat că dacă ipoteza este adevărată pentru n, ea este adevărată şi pentru $n + 1$. Demonstraţia este completă."

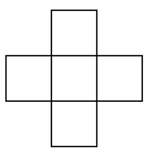
4. Pe axa numerelor reale se vopsesc cu roşu toate punctele care corespund unor întregi de forma $81x + 100y$, unde x şi y sunt numere naturale nenule. Toţi întregii rămaşi se vopsesc cu albastru. Determinaţi un punct P pe dreaptă astfel încât, pentru orice punct T corespunzător unui întreg, simetricul lui T faţă de P să fie un număr întreg de o culoare diferită de cea a lui T.

Baraj India, 2002

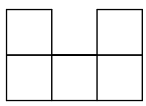
5. 94 de cărămizi, fiecare măsurând $4'' \times 10'' \times 19''$ trebuie stivuite una peste alta astfel încât ele să formeze un turn înalt de 94 de cărămizi. Fiecare cărămidă poate fi orientată astfel încât să contribuie cu $4''$ sau $10''$ sau $19''$ la înălţimea totală a turnului. Câte înălţimi diferite ale turnului se pot obţine folosind toate cele 94 de cărămizi? [2]

Concurs AIME, SUA, 1994

6. Determinaţi toate numerele naturale nenule n cu proprietatea că tabla $15 \times n$ poate fi pavată cu piese de formele



şi



Olimpiada CentroAmericană, 2000

7. Fie $a, b \in \mathbb{Z}$, cu $a \cdot b < 0$ şi mulţimea $A = \{ax + by \mid a, b \in \mathbb{N}\}$. Arătaţi că $n \in A \Leftrightarrow -n \in A$.

Dorel Miheţ, Concursul ,,Gr. Moisil", Oradea, 2014 - enunţ modificat

[2] Notaţia x'' desemnează x *inch*-i sau ţoli. 1 inch = 2,54 cm.

SCURT ISTORIC

La sfârşitul secolului al XIX-lea, matematicianul german Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917), în cadrul cursurilor pe care le ţinea la universitate, a formulat problema care îi poartă numele:

Fiind date numerele naturale nenule $x_1, x_2, \ldots, x_n$, cu c.m.m.d.c.$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$, aflaţi cel mai mare număr natural care nu se scrie ca $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ cu $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$.

Cea mai mare asemenea non-francatură se notează de obicei $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

În 1882, matematicianul englez James Joseph Sylvester (18141897) a rezolvat problema de mai sus pentru $n = 2$, determinând şi numărul non-francaturilor:
$g(x_1, x_2) = x_1x_2 - x_1 - x_2$, numărul non-francaturilor fiind, aşa cum am văzut, $N(x_1, x_2) = \frac{(x_1-1)(x_2-1)}{2}$.

Pentru $n = 3$ se ştie că $g(x_1, x_2, x_3) \geq \sqrt{3x_1x_2x_3} - x_1 - x_2 - x_3$, estimarea fiind destul de bună. În plus, valoarea exactă poate fi determinată algoritmic. (Vezi şi problema 7, cu precizarea că se arată uşor că $g(x_1, x_2, x_3) = g_0(x_1, x_2, x_3) - x_1 - x_2 - x_3$.)

Şi pentru $n \geq 4$ există rezultate, mai ales abordări algoritmice, dar rezultatele sunt mai puţin precise, iar algoritmii nu mai sunt cu timp de execuţie cel mult polinomial.

BIBLIOGRAFIE

http://en.wikipedia.org/wiki/Coin_problem

https://cs.uwaterloo.ca/~shallit/Talks/frob6.pdf

http://math.sfsu.edu/beck/papers/frobeasy.slides.pdf