FIŞA 1

1. Dacă n, k, ℓ sunt numere naturale nenule şi $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, iar $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, demonstraţi că

$$\prod_{j=1}^{n} \left(a_i^k + \frac{1}{a_i^\ell} \right) \geq \prod_{j=1}^{n} \left(a_i^k + \frac{1}{b_i^\ell} \right).$$

2. Demonstraţi că dacă $a, b, c > 0$ au suma 3, iar $k \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$, atunci are loc inegalitatea

$$\frac{1}{x^2+k} + \frac{1}{y^2+k} + \frac{1}{z^2+k} \geq \frac{3}{1+k}.$$

3. Găsiţi cel mai mare număr natural n pentru care există numerele naturale $x_1, x_2, \ldots, x_n$, nu toate nule, astfel încât pentru fiecare alegere a numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_n$ din multimea $\{-1, 0, 1\}$, nu toate egale cu 0, n^3 să nu dividă numărul $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$.

4. For every $n \in \mathbb{N}$, define the power sum of n as follows. For every prime divisor p of n, consider the largest positive integer k for which $p^k \leq n$, and sum up all the p^k's. (For instance, the power sum of 100 is $2^6 + 5^2 = 89$.) Prove that the power sum of n is larger than n for infinitely many positive integers n.

5. Let $n > 2$ be a positive integer. Find the largest value h and the smallest value H for which

$$h < \frac{a_1}{a_1+a_2} + \frac{a_2}{a_2+a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_n+a_1} < H$$

holds for any positive reals $a_1, \ldots, a_n$.

6. Demonstraţi că într-un trapez ortodiagonal produsul lungimilor laturilor neparalele este mai mare decât produsul bazelor.