Asupra unor puncte de concurenţă ale unui triunghi

Dan POPESCU[1]

Omagiu adus lui **Cezar Coşniţă,**
la centenarul naşterii sale

Abstract. Some remarkable points in the geometry of triangle are presented in a unified way, as being Jacobi points in particular positions.

Keywords: Jacobi point, Fermat-Torricelli point, Napoleon′s point, Vecten′s point, Morley′s point, Coşniţă′s point.

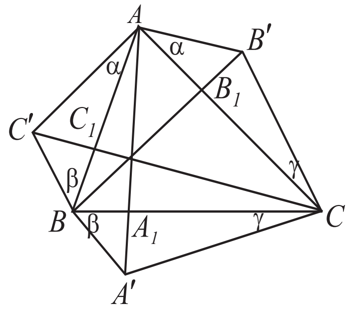
MSC 2000: 51M04.

Nota îşi propune o abordare metodologică unitară şi accesibilă a câtorva probleme de concurenţă din geometria elementară a triunghiului.

Următorul rezultat este atribuit matematicianului german **Carl Gustav Jacob Jacobi** (1804-1851). Mai este numit şi *teorema Fermat-Torricelli generalizată* ([**2**]).

Teorema 1. *Fie triunghiul* ABC *şi punctele* A', B', C' *din planul său încât* $\widehat{A'BC} \equiv \widehat{C'BA}$, $\widehat{B'CA} \equiv \widehat{A'CB}$ *şi* $\widehat{C'AB} \equiv \widehat{B'AC}$. *Atunci dreptele* AA', BB' *şi* CC' *sunt concurente într-un punct* J, *numit punctul lui JACOBI.*

Demonstraţie. Să analizăm doar cazul $AA' \cap [BC] = \{A_1\}$ şi $BC \cap (AA') \neq \theta$, celelalte cazuri presupunând raţionamente similare. Dacă $\alpha = m(\widehat{B'AB})$, $\beta = m(\widehat{A'BC})$, $\gamma = m(\widehat{B'CA})$, atunci $\dfrac{A_1B}{A_1C} = \dfrac{\mathcal{A}[ABA']}{\mathcal{A}[ACA']} = \dfrac{AB \cdot A'B \sin(B+\beta)}{AC \cdot A'C \sin(C+\gamma)}$. Se obţin relaţii analoage relativ la punctele $B_1 \in AC$ şi $C_1 \in AB$ şi se verifică uşor că $\dfrac{A_1B}{A_1C} \cdot \dfrac{B_1C}{B_1A} \cdot \dfrac{C_1A}{C_1B} = 1$. Conform reciprocei teoremei lui Ceva, dreptele AA_1, BB_1 şi CC_1 sunt concurente.



De observat că punctul J poate fi şi în exteriorul triunghiului ABC.

Particularizând α, β, γ, vom obţine mai multe puncte remarcabile ale triunghiului.

I. Punctul lui Fermat. În exteriorul triunghiului ABC se construiesc triunghiurile echilaterale $A'BC, B'AC$ şi $C'AB$. Evident, perechile de semidrepte $([AB', [AC')$, $([BA', [BC')$ şi $([CA', [CB')$ sunt izogonale pentru unghiurile triunghiului $\widehat{A}, \widehat{B}$ şi, respectiv, $\widehat{C}$. Atunci, dreptele AA', BB' şi CC' se intersectează într-un punct F, *punctul lui FERMAT*.

O chestiune conexă acestui rezultat o constituie problema găsirii unui punct P din interiorul unui triunghi ABC cu toate unghiurile de măsură mai mică decât $120°$, astfel ca suma $PA + PB + PC$ să fie minimă. Acest punct a fost cercetat şi de *E. TORRICELLI*. Dacă $P \in \text{Int}(\triangle ABC)$ şi triunghiul BPC se roteşte cu $60°$ în jurul lui B, atunci $PA + PB + PC = PA + PP' + P'C'$. Aşa că suma este minimă,

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Ştefan cel Mare", Suceava

dacă şi numai dacă P, P' sunt pe CC'. Astfel, punctul lui *TORRICELLI* coincide cu punctul lui FERMAT.

II. Punctul lui Napoleon. Dacă pe laturile triunghiului ABC şi în exteriorul lui se construiesc trei triunghiuri echilaterale cu centrele B, E şi F, atunci dreptele AD, BE şi CF sunt drepte concurente într-un punct N, numit *punctul lui NAPOLEON*, după numele împăratului Franţei NAPOLEON BONAPARTE.

Triunghiul echilateral cu centrul D are o latură $[BC]$, cel cu centrul E are o latură $[AC]$ şi cel cu centrul F are o latură $[AB]$. Deci şi punctul lui NAPOLEON este tot un punct JACOBI. Totodată, triunghiul $\triangle DEF$ este şi el echilateral, după cum se deduce prin calculul unei singure lungimi DE.

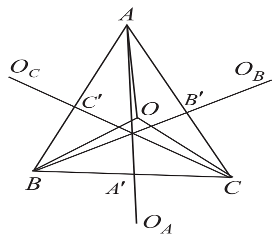
III. Punctul lui Vecten. Dacă pe laturile triunghiului ABC şi în exteriorul lui se construiesc pătrate cu centrele D, E şi F atunci dreptele AD, BE şi CF sunt drepte concurente în punctul V, numit *punctul lui VECTEN*, fiind pus în evidenţă de profesorul francez de liceu M. VECTEN (1812).

IV. Punctul lui Morley. Acesta este un alt punct de tip JACOBI. În 1899, profesorul FRANK MORLEY (1860-1937) a arătat că trisectoarele unghiurilor unui triunghi ABC determină un triunghi echilateral $A'B'C'$, iar AA', BB' şi CC' sunt drepte concurente într-un punct, numit *punctul lui MORLEY.*

V. Punctul lui Coşniţă şi dualul său. Spre deosebire de dualul său, acesta nu-i punct de tip Jacobi; însă, în [**2**] se dă rezultatului lui Coşniţă o demonstraţie pe baza Teoremei 1. Vom prezenta o alta, directă şi simplă.

Teorema 2 (Coşniţă). *Fie triunghiul ABC, O centrul cercului circumscris triunghiului, O_A, O_B şi O_C centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor OBC, OAC şi OAB, respectiv. Atunci dreptele AO_A, BO_B şi CO_C sunt concurente în punctul K_1, numit punctul lui COŞNIŢĂ.*

Demonstraţie. Se consideră $A' = AO_A \cap BC$ şi punctele B', C' definite analog. Avem $m(\widehat{BOC}) = 2A$ etc. Se deduce că $m(\widehat{BO_AC}) = 360° - 4A$. Astfel, $m(\widehat{CBO_A}) = m(\widehat{BCO_A}) = 2A - 90°$. Apoi, $\sin(\widehat{ABO_A}) = \sin(B + 2A - 90°) = \cos(A - C)$. Analog, $\sin(\widehat{ACO_A}) = \cos(A - B)$. Deci, $\dfrac{A'B}{A'C} = \dfrac{\mathcal{A}[ABO_A]}{\mathcal{A}[ACO_A]} = \dfrac{AB \cdot BO_A \sin(\widehat{ABO_A})}{AC \cdot CO_A \sin(\widehat{ACO_A})} = \dfrac{c\cos(A - C)}{b\cos(A - B)}$. Analog, $\dfrac{B'C}{B'A} = \dfrac{a\cos(B - A)}{c\cos(B - C)}$ şi $\dfrac{C'A}{C'B} = \dfrac{b\cos(C - B)}{a\cos(C - A)}$ şi concurenţa este evidentă, conform reciprocei teoremei lui Ceva.



Teorema 3. *Dacă I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC, I_A, I_B şi I_C sunt centrele cercurilor înscrise triunghiului IBC, IAC şi, respectiv, IAB. Atunci dreptele AI_A, BI_B şi CI_C sunt concurente într-un punct K_2, numit punctul lui COŞNIŢĂ dual.*

Demonstraţie. Se observă că K_2 este un punct Jacobi cu $\alpha = \frac{A}{4}$, $\beta = \frac{B}{4}$, $\gamma = \frac{C}{4}$.

În [**1**], articol recent apărut, sunt date un număr mare de rezultate înrudite cu teorema lui Coşniţă (printre care şi Teorema 3, cu o demonstraţie diferită).

Bibliografie

1. **C. Barbu** - *Variaţiuni pe tema punctului lui Coşniţă*, GM(B)-4/2010, 180-185.
2. **M. de Villiers** - *A Dual to Kosnita's Theorem,*, Math. and Inf. Quart., 6(1996), 169-171.

IMPORTANT

- În scopul unei legături rapide cu redacţia revistei, pot fi utilizate următoarele adrese e-mail: **t_birsan@yahoo.com** şi **profgpopa@yahoo.co.uk**. Pe această cale colaboratorii pot purta cu redacţia un dialog privitor la materialele trimise acesteia, procurarea numerelor revistei etc. Sugerăm colaboratorilor care trimit probleme originale pentru publicare să le numeroteze şi să-şi reţină o copie xerox a lor pentru a putea purta cu uşurinţă o discuţie prin e-mail asupra acceptării/neacceptării acestora de către redacţia revistei.

- La *problemele de tip L* se primesc soluţii de la orice iubitor de matematici elementare (indiferent de *preocupare profesională* sau *vârstă*). Fiecare dintre soluţiile acestor probleme - ce sunt publicate în revistă după un an - va fi urmată de numele tuturor celor care au rezolvat-o.

- **Adresăm cu insistenţă rugămintea ca materialele trimise revistei să nu fie (să nu fi fost) trimise şi altor publicaţii.**

- Rugăm ca materialele tehnoredactate să fie trimise pe adresa redacţiei însoţite de fişierele lor (de preferinţă în LaTeX).

- Pentru a facilita comunicarea redacţiei cu colaboratorii ei, autorii materialelor sunt rugaţi să indice adresa e-mail.