Completare.

Fie n un număr natural, $n \geq 3$. În fiecare pătrăţel unitate al unei table $n \times n$ se scrie câte un număr din mulţimea $M = \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$. O completare a tablei se numeşte *bună* dacă, pentru fiecare număr natural i, $1 \leq i \leq n$, linia i şi coloana i conţin, împreună, toate numerele din M.

Demonstraţi că există o infinitate de valori ale lui n pentru care există o completare bună a tablei $n \times n$.

(în legătură cu problema 2 de la Concursul Danube, proba pentru juniori, 2017)

Soluţie:

Se poate arăta că dacă n este o putere a lui 2, atunci pentru tabla $n \times n$ există completări bune.

Vom demonstra prin inducţie după m că dacă $n = 2^m$, atunci există completări bune ale tablei $n \times n$.

Pentru $m = 1$ putem completa astfel:

1	2
3	1

.

(Exemplul pentru $m = 2$ ar fi rezolvat prima cerinţă a problemei din concurs şi el poate sugera un mod de a construi inductiv exemplele de completări.)

Ideea este următoarea: având o completare bună pentru tabla $2^{m-1} \times 2^{m-1}$ cu numerele $1, 2, \ldots, 2^m - 1$, construim o completare bună a tablei $2^m \times 2^m$ cu numerele $1, 2, \ldots, 2^{m+1} - 1$ astfel: împărţim tabla în 4 table $2^{m-1} \times 2^{m-1}$. În sferturile din stânga-sus şi din dreapta-jos folosim completarea tablei $2^{m-1} \times 2^{m-1}$ cu numerele $1, 2, \ldots, 2^m - 1$. În celelalte două sferturi trebuie să scriem şi numerele de la 2^m la $2^{m+1} - 1$. În dreapta sus vom folosi acelaşi tip de completare ca şi pentru celelalte două sferturi, dar în locul numerelor $1, 2, \ldots, 2^m - 1$ vom pune numerele $2^m, 2^m + 1, \ldots, 2^{m+1} - 2$ (în loc de k punem $k + 2^m - 1$). În fine, în colţul din stânga jos vom folosi acelaşi tip de completare ca în dreapta-sus, dar în locul numărului 2^m vom pune numărul $2^{m+1} - 1$.

Astfel, pornind de la

1	2
3	1

, obţinem pentru $n = 2^2$ completarea

1	2	4	5
3	1	6	4
7	5	1	2
6	7	3	1

, apoi pentru $n = 2^3$ completarea

1	2	4	5	8	9	11	12
3	1	6	4	10	8	13	11
7	5	1	2	14	12	8	9
6	7	3	1	13	14	10	8
15	9	11	12	1	2	4	5
10	15	13	11	3	1	6	4
14	12	15	9	7	5	1	2
13	14	10	15	6	7	3	1

şi aşa mai departe.

Formal, procedăm astfel:

Dacă notăm cu $X_1(a_1, a_2, a_3) = \begin{array}{|c|c|}\hline a_1 & a_2 \\ \hline a_3 & a_1 \\ \hline\end{array}$, putem defini inductiv

$$X_m(a_1, a_2, \ldots, a_{2^{m+1}-1}) =$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline X_{m-1}(a_1, a_2, \ldots, a_{2^m-1}) & X_{m-1}(a_{2^m}, a_{2^m+1}, \ldots, a_{2^{m+1}-2}) \\ \hline X_{m-1}(a_{2^{m+1}-1}, a_{2^m+1}, \ldots, a_{2^{m+1}-2}) & X_{m-1}(a_1, a_2, \ldots, a_{2^m-1}) \\ \hline\end{array}.$$

În particular, alegând $a_k = k$, $k = \overline{1, 2n-1}$, obţinem o completare bună a tablei $n \times n$.

Folosind faptul că în $X_{m-1}(a_1, a_2, \ldots, a_{2^m-1})$, pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, 2^{m-1}\}$, fiecare din numerele $a_1, a_2, \ldots, a_{2^m-1}$ apare pe linia sau pe coloana k, se arată uşor că această proprietate rămâne adevărată şi pentru numerele din X_m.