COMENTARII OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2013
ULTIMELE DOUĂ TESTE DE SELECŢIE

Abstract. Comments on some of the problems given at the last two Selection Tests after the National Mathematics Olympiad 2013.

Data: 27 mai 2013.
Autor: Dan Schwarz, Bucureşti.

1. Introducere

Această prezentare, însoţită de comentarii asupra ultimelor două Teste de Selecţie de după Faza Naţională a Olimpiadei de Matematică este, din nou, după cum v-am obişnuit, opinia personală a autorului.[1]

Voi indica prin culoarea **roşie** eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea **verde** varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea **albastră** pentru comentariile personale.

2. Juniori – Test 4

Subiectul (1)**.** *Fie A un punct pe semicercul de diametru $[BC]$, iar X un punct oarecare din interiorul triunghiului ABC. Dreapta BX intersectează semicercul a doua oară în K şi latura (AC) în F, în timp ce dreapta CX intersectează semicercul a doua oară în L şi latura (AB) în E. Arătaţi că cercurile circumscrise triunghiurilor AKF şi AEL sunt tangente.*

Laurenţiu Ploscaru

Soluţie. Fie O centrul semicercului. Dacă se observă că dreapta AO este tangentă ambelor cercuri (un desen îngrijit poate sugera acest lucru), totul e gata. Dar $\triangle AOC$ este isoscel, deci $\angle OAC = \angle OCA = \angle AKB$ (şi anume jumătate din măsura arcului AF), de unde rezultă că AO este tangentă cercului circumscris triunghiului AKF. La fel pentru celălalt cerc. $\square$

Subiectul (2)**.** *Fie $a, b, c > 0$ astfel încât $a + b + c = 1$. Arătaţi că*

$$\frac{1-a^2}{a+bc} + \frac{1-b^2}{b+ca} + \frac{1-c^2}{c+ab} \geq 6.$$

Lucian Petrescu

Mulţumirile mele sincere celor cu care am dialogat cu privire la problemele propuse şi la efectele dorite, discuţii care au condus la materialul de faţă.

[1]Consultaţi subiectele în complet, soluţiile oficiale şi rezultatele acestor teste de selecţie la `http://ssmr.ro/pregatire_onm`.

Soluţie. Mă voi distra să investighez cât de ”tare” este inegalitatea. Dacă ni se cere să arătăm că $A \geq B$, dar putem arăta $A \geq C \geq B$, atunci inegalitatea $C \geq B$ este, evident, ”mai tare” decât $A \geq B$.

Avem $\dfrac{1-a^2}{a+bc} = \dfrac{1-a^2}{a(a+b+c)+bc} = \dfrac{1-a^2}{(a+b)(c+a)} = \dfrac{(1-a)(1+a)}{(1-c)(1-b)}$, deci

$$\sum \frac{1-a^2}{a+bc} = \sum \frac{(1-a)(1+a)}{(1-c)(1-b)} \geq 3\sqrt[3]{\prod \frac{1+a}{1-a}},$$

din inegalitatea AM-GM. Dacă vom reuşi să arătăm că $\prod \dfrac{1+a}{1-a} \geq 8$, am izbândit, şi în acelaşi timp am găsit o inegalitate ”mai tare”, cea de mai sus. Inegalitatea se mai scrie şi $\sum \ln \dfrac{1+a}{1-a} \geq 3\ln 2$. Funcţia $f\colon (0,1) \to (0,\infty)$ dată de $f(x) = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$ este convexă, căci avem $f''(x) = \dfrac{4x}{(1-x^2)^2}$, deci putem aplica inegalitatea lui Jensen

$$\sum \ln \frac{1+a}{1-a} \geq 3\ln \frac{1+\sum a/3}{1-\sum a/3} = 3\ln \frac{1+1/3}{1-1/3} = 3\ln 2.$$

Alternativ, se poate utiliza metoda multiplicatorilor Lagrange, dar ar fi un ”overkill”. În concluzie, inegalitatea se reduce la aplicarea consecutivă a două inegalităţi extrem de cunoscute (şi folosite), deci e relativ ”slabă”. □

Remarcă. Să observăm că dacă ”desfacem” inegalitatea $\prod \dfrac{1+a}{1-a} \geq 8$, se obţine $1+\sum a+\sum ab+abc \geq 8(1-\sum a+\sum ab-abc)$, adică forma neomogenă $2+9abc \geq 7(ab+bc+ca)$. Dar avem, direct de la început,

$$\frac{1-a^2}{a+bc} + a = \frac{1+abc}{a(a+b+c)+bc} = \frac{1+abc}{(a+b)(c+a)} = \frac{(1+abc)(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)},$$

deci din $\sum \left(\dfrac{1-a^2}{a+bc} + a\right) \geq 6 + \sum a = 7$ ajungem la forma echivalentă $2(1+abc) \geq 7(a+b)(b+c)(c+a)$.

Dar cum $(a+b)(b+c)(c+a) = (1-c)(1-a)(1-b) = ab+bc+ca-abc$, se poate scrie şi $2+9abc \geq 7(ab+bc+ca)$, adică exact inegalitatea de după aplicarea AM-GM. Ciudat ...

Remarcă (Adiţională). Andrei Eckstein descoperă referinţa BMO 1999 (British Mathematical Olympiad) pentru exact această variantă, anume

$$7(pq+qr+rp) \leq 2+9pqr \text{ pentru } p,q,r \geq 0 \text{ şi } p+q+r=1.$$

Ea este citată (incorect, ca BMO 1979) şi într-un articol din Mathematical Reflections 4/2006. Pe AoPS apare versiunea $1+9abc \geq 4(ab+bc+ca)$, care este mai ”tare”, căci din $a+b+c=1$ se obţine $1 \geq 3(ab+bc+ca)$ din inegalitatea Mac-Laurin $\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^2 \geq \dfrac{ab+bc+ca}{3}$, iar prin adunarea celor două se obţine $2+9abc \geq 7(ab+bc+ca)$. Se poate de fapt demonstra (cel mai rapid, prin metoda multiplicatorilor Lagrange) că varianta ultimă $1 + 9abc \geq 4(ab + bc + ca)$ este de fapt cea mai "tare" de acest tip; acest lucru este justificat şi prin cazurile ei de egalitate, unde pe lângă simetrica $a = b = c = 1/3$ apar şi $(a, b, c) \in \{(0, 1/2, 1/2), (1/2, 0, 1/2), (1/2, 1/2, 0)\}$.

Subiectul (3)**.** *Fie D mijlocul laturii $[BC]$ a triunghiului ABC şi fie E proiecţia lui A pe BC. Dacă P este punctul de intersecţie a mediatoarei segmentului $[DE]$ cu perpendiculara din D pe bisectoarea unghiului $\angle BAC$, demonstraţi că P aparţine cercului lui Euler al triunghiului ABC.*

Marius Bocanu

Soluţie. Problema tratează configuraţii cunoscute; într-o versiune de soluţie apare şi dreapta lui Simson. Cercul lui Euler este însă suficient de important ca rezultat de geometrie sintetică pentru ca orice problemă legată de el să fie binevenită. Aici mă opresc; vă las să studiaţi soluţiile oficiale. □

Subiectul (4)**.** *Pentru o secvenţă $(a_1, a_2, \ldots, a_{2013})$ de numere întregi, vom spune despre un triplet (i, j, k) cu $1 \leq i < j < k \leq 2013$ că este **progresiv** dacă $a_k - a_j = a_j - a_i = 1$. Aflaţi numărul maxim de triplete progresive pe care le poate avea o secvenţă formată din 2013 numere întregi.*

Laurenţiu Ploscaru

Soluţie. O primă observaţie este că dacă o secvenţă conţine $a_p > a_q$ pentru $1 \leq p < q \leq 2013$, secvenţa în care schimbăm poziţiile lui a_p şi a_q conţine cel puţin atâtea triplete progresive ca şi secvenţa iniţială. Prin urmare este suficient să considerăm secvenţele în care termenii sunt (nu neapărat strict) crescători.

Acum, dacă $a_{q+1} - a_q > 1$ pentru $1 \leq q < 2013$, atunci secvenţa în care înlocuim a_p cu $a_p + (a_{q+1} - a_q) - 1$ pentru toţi $1 \leq p \leq q$ conţine cel puţin atâtea triplete progresive ca şi secvenţa iniţială. Prin urmare este suficient să considerăm secvenţele de tipul

$$(\underbrace{a, a, \ldots, a}_{n_0 \text{ ori}}, \underbrace{a+1, a+1, \ldots, a+1}_{n_1 \text{ ori}}, \ldots, \underbrace{a+t, a+t, \ldots, a+t}_{n_t \text{ ori}}),$$

unde $n_0 + n_1 + \cdots + n_t = 2013$. Pentru a exista triplete progresive avem nevoie de $t \geq 2$, şi atunci numărul total de triplete progresive este

$$n_0 n_1 n_2 + n_1 n_2 n_3 + \cdots + n_{t-2} n_{t-1} n_t.$$

Dar dacă $t \geq 3$, înlocuind $(n_0, n_1, n_2, n_3, \ldots, n_t)$ cu $(n_1, n_2, (n_0+n_3), \ldots, n_t)$ obţinem cel puţin la fel de multe triplete progresive (exact la fel de multe pentru $t = 3$), deci maximul se realizează cu siguranţă pentru $t = 2$, când avem $n_0 n_1 n_2 \leq \left(\dfrac{n_0 + n_1 + n_2}{3}\right)^3 = 671^3$, cu egalitate doar pentru cazul $n_0 = n_1 = n_2 = 671$ (celelalte cazuri de egalitate pentru maxim provin din observaţia de mai sus, pentru $t = 3$ şi $n_0 + n_3 = n_1 = n_2 = 671$; cazul $t = 2$ fiind de fapt un caz particular, când $n_0 = 0$ sau $n_3 = 0$). □

Soluţie Alternativă. Considerăm **mulţimea** $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_{2013}\}$ şi fie $v_1 < v_2 < \cdots < v_n$ o indexare a valorilor elementelor din M. Fie acum şi $N_m = \{\ell \in \{1, 2, \ldots, 2013\} \mid a_\ell = v_m\}$, pentru toţi $1 \leq m \leq n$; este clar că mulţimile N_m constituie o partiţie a mulţimii $\{1, 2, \ldots, 2013\}$. În fine, fie $I = N_1 \cup N_4 \cup N_7 \cup \cdots$, $J = N_2 \cup N_5 \cup N_8 \cup \cdots$, $K = N_3 \cup N_6 \cup N_9 \cup \cdots$. Desigur, şi I, J, K constituie o partiţie a mulţimii $\{1, 2, \ldots, 2013\}$. Acum, pentru orice triplet progresiv (i, j, k) există o (unică) permutare care să aparţină mulţimii de triplete $I \times J \times K$, căci pentru fiecare din aceste trei mulţimi, considerând x, y două dintre elementele sale, avem $a_x = a_y$ sau $|a_x - a_y| \geq 3$. Prin urmare, numărul de triplete progresive este egal cu cel mult $|I \times J \times K| = |I| \cdot |J| \cdot |K| \leq \left(\dfrac{|I| + |J| + |K|}{3}\right)^3 = \left(\dfrac{2013}{3}\right)^3 = 671^3$. Un model pentru cazul de egalitate este dat de secvenţa

$$(\underbrace{v-1, v-1, \ldots, v-1}_{671 \text{ ori}}, \underbrace{v, v, \ldots, v}_{671 \text{ ori}}, \underbrace{v+1, v+1, \ldots, v+1}_{671 \text{ ori}}),$$

cu $M = \{v-1, v, v+1\}$, $I = N_1 = \{1, \ldots, 671\}$, $J = N_2 = \{672, \ldots, 1342\}$, $K = N_3 = \{1343, \ldots, 2013\}$. O analiză mai adâncă poate chiar scoate în evidenţă cu această metodă **toate** cazurile de egalitate (găsite în soluţia precedentă), dar acest lucru nu era cerut. $\square$

Testul 4 a fost mult prea uşor. Primii zece concurenţi au rezolvat complet primele trei probleme, numai Problema 4 dovedindu-se suficient de dificilă pentru a produce o departajare (două note maxime, şi multe note mijlocii). În total contrast, Testul 5 a apărut a fi suficient de dificil pentru a produce răsturnări spectaculoase de clasament.

3. Juniori – Test 5

Subiectul (1)**.** *Determinaţi toate perechile de numere întregi (x, y) care au proprietatea că fiecare dintre numerele x^3+y şi $x+y^3$ este divizibil cu x^2+y^2.*

Soluţie. Să dăm mai întâi la o parte cazul $xy = 0$. Dacă, să zicem, $y = 0$, avem nevoie de $x^2 \mid x^3$ şi $x^2 \mid x$, deci $(x, y) \in \{(0, 0), (1, 0), (-1, 0)\}$. Prin simetrie, soluţiile posibile pentru $xy = 0$ sunt deci

$$(x, y) \in \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)\}.$$

Fie atunci $xy \neq 0$. Fie $d = (x, y)$, şi $x = da$, $y = db$, $(a, b) = 1$. Relaţiile se scriu $d(a^2 + b^2) \mid d^2a^2 + b$ şi $d(a^2 + b^2) \mid d^2b^2 + a$, deci $d \mid b$ şi $d \mid a$, de unde $d \mid (a, b) = 1$, aşadar $d = 1$.

Dar atunci, dacă $x^2 + y^2 \mid x^3 + y$, avem şi

$$x^2 + y^2 \mid x(x^3 + y) - (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = y(x + y^3),$$

deci $x^2 + y^2 \mid x + y^3$ (deoarece $(x, y) = 1$ conduce la $(x^2 + y^2, y) = 1$), şi reciproc, deci contează doar una dintre relaţii.

Fie atunci $x^2 + y^2 \mid x^3 + y$; cum avem şi $x^2 + y^2 \mid x(x^2 + y^2) = x^3 + xy^2$, rezultă $x^2 + y^2 \mid (x^3 + xy^2) - (x^3 + y) = y(xy - 1)$, deci $x^2 + y^2 \mid xy - 1$

(deoarece $(x, y) = 1$ conduce la $(x^2 + y^2, y) = 1$). Dar deoarece avem $x^2+y^2 \geq 2|xy| > |xy|+1 \geq |xy-1|$ pentru $|xy| > 1$, trebuie $|xy| = 1$, adică $x, y \in \{-1, 1\}$. Toate cazurile satisfac, deci avem soluţiile adiţionale

$$(x, y) \in \{(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\},$$

în total 9 perechi de soluţii. □

Remarcă. Din păcate problema nu are decât soluţiile triviale; astfel de probleme sunt în general dezamăgitoare, căci nu arată decât că relaţiile cerute nu se pot produce, în afara cazurilor triviale.[2]

În mod ciudat nu s-a înregistrat niciun scor maxim de 7 puncte la această problemă, după mine banală.

Subiectul (2). *Fie $\mathcal{M}$ mulţimea punctelor de abscisă întreagă situate pe axa d a numerelor reale d. Elementele mulţimii $\mathcal{M}$ se colorează în alb sau negru. Arătaţi că cel puţin exact una din următoarele afirmaţii este adevărată*

a) există o submulţime finită $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$ şi un punct $M \in d$ astfel încât punctele mulţimii $\mathcal{M} \setminus \mathcal{F}$ aflate pe una dintre semidreptele determinate de M pe d sunt toate colorate cu alb, iar punctele mulţimii $\mathcal{M} \setminus \mathcal{F}$ aflate pe cealaltă semidreaptă sunt toate colorate cu negru;

*b) există o submulţime infinită $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}$ care are **centru de simetrie**, în sensul că există $T \in d$ (centrul de simetrie) cu proprietatea că pentru orice punct $A \in \mathcal{S}$, simetricul lui A faţă de T aparţine lui $\mathcal{S}$ şi are aceeaşi culoare ca şi A.*

Soluţie. Să observăm că dacă există o submulţime cofinită $\mathcal{M} \setminus \mathcal{F}$ ca cea de la afirmaţia *a)*, atunci există $m \in \mathbb{N}^*$ aşa încât mulţimile $\mathcal{M} \cap [m, +\infty)$ şi $\mathcal{M} \cap (-\infty, -m]$ sunt monocolore de culori diferite. Pe de altă parte, dacă există o submulţime infinită $\mathcal{S}$ ca cea de la afirmaţia *b)*, atunci există şi o submulţime infinită $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ monocoloră, ce îndeplineşte şi ea afirmaţia *b)*, dar atunci mulţimile $\mathcal{T} \cap [m, +\infty)$ şi $\mathcal{T} \cap (-\infty, -m]$ sunt infinite, monocolore de aceeaşi culoare, pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$.

Aceasta arată că afirmaţiile *a)* şi *b)* se exclud reciproc, deci folosirea expresiei "cel puţin una ... este adevărată" este abuzivă; dacă se dorea, se putea cere demonstrarea faptului că "exact una ... este adevărată".

Să fixăm punctele $T(0)$ şi $T'(1/2)$ pe axa d. Dacă mulţimea $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{N}^*$, a punctelor n pentru care culoarea punctului $-n$ (simetricul lui n faţă de T) este aceeaşi ca şi culoarea lui n, este infinită, putem lua $\mathcal{S} = \mathcal{P} \cup (-\mathcal{P})$ cu centru de simetrie T, şi satisface afirmaţia *b)*. Altfel, dacă mulţimea $\mathcal{P}' \subseteq \mathbb{N}^*$, a punctelor n pentru care culoarea punctului $-n+1$ (simetricul lui n faţă de T') este aceeaşi ca şi culoarea lui n, este infinită, putem lua $\mathcal{S}' = \mathcal{P}' \cup (1 - \mathcal{P}')$ cu centru de simetrie T', şi satisface afirmaţia *b)*.

[2] Să remarcăm totuşi că una singură din relaţii, în izolare, are şi soluţii netriviale. Pentru $x^2 + y^2 \mid x^3 + y$ avem şi soluţiile $(x, y) = (z, -z^3)$ pentru orice $z \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$; evident, cu $d = (z, -z^3) = |z| > 1$.

În caz contrar, mulţimile $\mathcal{P}$ şi $\mathcal{P}'$ sunt finite, deci există $m \in \mathbb{N}^*$ astfel ca pentru orice $n \geq m$ să avem $-n$ şi $-n+1$ ambele de culoare diferită de cea a lui n. Dar atunci culoarea lui $-m$ este diferită de cea a lui m; culoarea lui $m+1$ este diferită de cea a lui $-m$, deci aceeaşi cu cea a lui m; culoarea lui $-m-1$ este diferită de cea a lui $m+1$, deci aceeaşi cu cea a lui $-m$; şi aşa mai departe, deci prin inducţie punctele $n \geq m$ au o aceeaşi culoare, iar punctele $-n \leq -m$ au şi ele o aceeaşi culoare, diferită de cea dinainte. Putem lua $\mathcal{F} = \{n \mid -m < n < m\}$ şi $M(0)$, şi satisface afirmaţia *a)*. $\square$

Remarcă. Este clar că pentru afirmaţia *b)* centrul de simetrie T al unei astfel de submulţimi $\mathcal{S}$ trebuie să aparţină lui $\mathbb{Z} \cup \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, şi aceasta este chiar cheia demonstraţiei produse mai sus, ţinând cont de consecinţele nefaste asupra adevărului cerinţei, aduse de observaţiile ce urmează.

• Dacă ne restrângem la doar centre $T \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, colorarea alternativă $\ldots ANANANANANANANANA \ldots$ nu satisface niciuna din condiţii (ceea ce este trivial de observat);

• Dacă ne restrângem la doar centre $T \in \mathbb{Z}$, colorarea quasi-alternativă $\ldots ANANANA\boldsymbol{NN}ANANANA \ldots$ nu satisface niciuna din condiţii (ceea ce este simpatic de demonstrat).

Subiectul (3). *Determinaţi valoarea minimă şi valoarea maximă a expresiei*

$$\sqrt{4-a^2} + \sqrt{4-b^2} + \sqrt{4-c^2}$$

unde a, b, c sunt numere reale cu $a^2+b^2+c^2=6$.

Soluţie. Metoda multiplicatorilor Lagrange se aplică într-atât de bine, încât merită o prezentare, măcar şi doar pentru valoarea ei didactică. Notăm $x = \sqrt{4-a^2}$, $y = \sqrt{4-b^2}$, $z = \sqrt{4-c^2}$, deci $x^2+y^2+z^2=6$, şi considerăm

$$L(x,y,z) = x+y+z-\lambda(x^2+y^2+z^2-6),$$

cu domeniul $\{(x,y,z) \mid x,y,z \in [0,2],\ x^2+y^2+z^2=6\}$ (λ este parametru real). Sistemul derivatelor sale parţiale este

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 1 - 2x\lambda \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial y} = 1 - 2y\lambda \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial z} = 1 - 2z\lambda \end{cases}$$

Pentru a obţine punctele critice din interiorul domeniului, egalăm cu zero derivatele parţiale. Cum atunci $\lambda \neq 0$, obţinem $x = y = z$, aşadar singurul punct critic din interiorul domeniului lui L este $(x,y,z) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$, pentru care $L(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}) = 3\sqrt{2}$ (şi se va dovedi, după analiza pe bordul domeniului, că este un punct de maxim global).

Pe bordul domeniului putem avea una dintre variabile egală cu 0, fie ea $z = 0$ (dar nu două, căci atunci a treia ar fi în afara domeniului). Putem folosi aceeaşi metodă, pentru

$$\ell(x, y) = x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 6),$$

cu domeniul $\{(x, y) \mid x, y \in (\sqrt{2}, 2),\ x^2 + y^2 = 6\}$ (λ este parametru real). Ca mai sus, se obţine punctul critic de pe bord $(x, y) = (\sqrt{3}, \sqrt{3})$, pentru care $\ell(\sqrt{3}, \sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$.

Tot pe bordul domeniului putem avea una dintre variabile egală cu 2, fie ea $z = 2$ (dar nu două, căci atunci suma pătratelor lor ar fi mai mare ca 6). Putem folosi aceeaşi metodă, pentru

$$\ell(x, y) = x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 2),$$

cu domeniul $\{(x, y) \mid x, y \in (0, \sqrt{2}),\ x^2 + y^2 = 2\}$ (λ este parametru real). Ca mai sus, se obţine punctul critic de pe bord $(x, y) = (1, 1)$, pentru care $\ell(1, 1) = 4$.

În fine, tot pe bordul domeniului, putem avea una dintre variabile egală cu 0 şi alta egală cu 2; atunci a treia ia valoarea $\sqrt{2}$, şi obţinem valoarea expresiei ca fiind $2 + \sqrt{2}$.

Prin urmare, deoarece $2 + \sqrt{2} < 2\sqrt{3} < 4 < 3\sqrt{2}$, valorile extreme ale expresiei sunt $2 + \sqrt{2}$ (minimă) şi $3\sqrt{2}$ (maximă), iar tripletele unde se obţin sunt determinate mai sus. □

Soluţie Alternativă. Adevărul adânc asupra motivului pentru care acestea sunt valorile extreme este însă dat de soluţia care urmează. Vom considera acum expresia

$$E(x, y, z) = \sqrt{4 - x} + \sqrt{4 - y} + \sqrt{4 - z},$$

cu domeniul $\mathcal{H} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in [0, 4],\ x + y + z = 6\}$, un hexagon regulat, de vârfuri $(0, 2, 4), (0, 4, 2), (2, 4, 0), (4, 2, 0), (4, 0, 2), (2, 0, 4)$, centru $(2, 2, 2)$ şi latură $2\sqrt{2}$ în spaţiul Euclidian.

Considerăm funcţia $f\colon [0, 4] \to [0, 2]$ dată prin $f(t) = \sqrt{4 - t}$. Funcţia f este concavă, căci $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\sqrt{4 - t} = -\dfrac{1}{4(4 - t)^{3/2}} < 0$ pe $(0, 4)$, dar e suficient să ştim că este strict concavă Jensen, adică $\dfrac{f(u) + f(v)}{2} < f\left(\dfrac{u + v}{2}\right)$ pentru orice $u, v \in [0, 4]$, $u \neq v$, ceea ce rezultă imediat din $(X + Y)^2 < 2(X^2 + Y^2)$ pentru $X \neq Y$.

Deoarece avem $E(x, y, z) = f(x) + f(y) + f(z)$, $E(x, y, z)$ este o expresie concavă simetrică, deci îşi atinge minimul într-un vârf al hexagonului şi maximul în centrul hexagonului, prin urmare $\max E = E(2, 2, 2) = 3\sqrt{2}$ şi $\min E = E(0, 2, 4) = 2 + \sqrt{2}$.

Voi demonstra formal în cele ce urmează afirmaţiile de mai sus; în principiu însă aceste fapte sunt bine-cunoscute, şi nu necesită prezentarea unei demonstraţii.

Fie $(x, y, z) \in \mathcal{H}$ şi fie $\mathcal{S}_3 = \{\sigma \mid \sigma\colon \{x, y, z\} \to \{x, y, z\},\ \text{bijectivă}\}$; atunci $(\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z)) \in \mathcal{H}$ pentru orice $\sigma \in \mathcal{S}_3$. Avem din concavitate

$$\frac{1}{6} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_3} E(\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z)) \leq E\left(\frac{1}{6} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_3} \sigma(x), \frac{1}{6} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_3} \sigma(y), \frac{1}{6} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_3} \sigma(z)\right),$$

dar cum $E(\sigma(x), \sigma(y), \sigma(z)) = E(x, y, z)$ pentru orice $\sigma \in \mathcal{S}_3$ (din simetria lui E), dar şi $\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_3} \sigma(x) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_3} \sigma(y) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_3} \sigma(z) = 2(x + y + z) = 12$, rezultă că avem $E(x, y, z) \leq E(2, 2, 2) = 3\sqrt{2}$ pentru orice $(x, y, z) \in \mathcal{H}$, cu egalitate doar pentru $x = y = z = 2$.

Fie acum $(x, y, z) \in \mathcal{H} \setminus \{\text{vârfurile lui } \mathcal{H}\}$. Există atunci un segment de capete (x_1, y_1, z_1) şi (x_2, y_2, z_2) conţinut în $\mathcal{H}$, al cărui punct mijlociu să fie (x, y, z). Avem din (stricta) concavitate

$$\frac{1}{2} \left(E(x_1, y_1, z_1) + E(x_2, y_2, z_2)\right) < E\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right) = E(x, y, z),$$

aşadar minimul expresiei E nu se poate realiza într-un astfel de punct. Rămâne deci că el se realizează într-un vârf al hexagonului,[3] şi cum toate au drept coordonate o permutare σ a lui $\{0, 2, 4\}$, rezultă că valoarea minimă este comună tuturor, şi este $E(0, 2, 4) = 2 + \sqrt{2}$. □

Subiectul (4). *Fie triunghiurile ascuţitunghice ABC şi BCD, cu $\angle BAC$ şi $\angle BDC$ congruente, iar punctele A şi D sunt de o parte şi de alta a dreptei BC. Fie $BE \perp AC$, $E \in (AC)$ şi $CF \perp BD$, $F \in (BD)$. Arătaţi că AD, EF şi dreapta determinată de ortocentrele H_1 şi H_2 ale triunghiurilor ABC şi BCD sunt concurente.*

Soluţie. (Laurenţiu Ploscaru) Notăm şi cu G piciorul înălţimii din C pe AB, şi cu H piciorul înălţimii din B pe CD. În mod evident, punctele E, F, G, H se află pe cercul de diametru BC.

Acum, citim hexagonul format în ordinea $BHFCGE$ şi aplicăm teorema lui Pascal; astfel punctele de intersecţie ale dreptelor (BH, CG), (BE, CF), (FH, GE) vor fi coliniare. Apoi, dacă ne uităm la triunghiurile GEH_1 şi FHH_2, din teorema lui Desargues rezultă că dreptele GH, FE şi H_1H_2 sunt concurente.

Acum, citim hexagonul format în ordinea $BFHCEG$ şi aplicăm teorema lui Pascal; astfel punctele de intersecţie ale dreptelor (BG, CH), (BF, CE), (FH, GE) vor fi coliniare. Apoi, dacă ne uităm la triunghiurile AGE şi DFH, din teorema lui Desargues rezultă că dreptele GH, FE şi AD sunt concurente.

Concluzia este acum evidentă, şi este clar că s-a folosit doar conciclicitatea picioarelor înălţimilor, deci condiţia ca unghiurile $\angle BAC$ şi $\angle BDC$ să fie congruente, precum şi cea ca punctele A şi D să fie în semiplane opuse faţă de BC, sunt redundante! □

[3] Ar mai trebui spus că existenţa unui punct de minim este garantată de continuitatea expresiei E pe compactul $\mathcal{H}$ (teorema Weierstrass).

4. Seniori – Test 4

Subiectul (1)**.** *Fie O un punct fixat din plan, şi $n \geq 3$ un număr întreg. Considerăm o mulţime finită $\mathcal{D}$ de discuri unitate închise în plan, distribuite astfel încât*

(a) Niciun disc din $\mathcal{D}$ nu conţine punctul O; şi
(b) Pentru fiecare $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, discul închis de rază $k+1$ şi centru O conţine centrele a cel puţin k discuri din $\mathcal{D}$.

Arătaţi că există o dreaptă ce trece prin O, şi care taie cel puţin $\frac{2}{\pi} \ln \frac{n+1}{2}$ discuri din $\mathcal{D}$.

Radu Gologan

Soluţie. Unghiul sub care se vede din O un disc de rază 1, centrat într-un punct situat la distanţă $d > 1$ de O, este evident $2 \arcsin \frac{1}{d}$. Dar atunci suma Σ a unghiurilor sub care se văd discurile din $\mathcal{D}$ este

$$\Sigma = 2 \sum_{\mathcal{D}} \arcsin \frac{1}{d} \geq 2 \sum_{k=1}^{n-1} \arcsin \frac{1}{k+1} > 2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} > 2(\ln(n+1) - \ln 2),$$

din cunoscuta inegalitate $\dfrac{\ln(k+2) - \ln(k+1)}{(k+2)-(k+1)} = \dfrac{1}{\zeta}\Big|_{\zeta \in (k+1, k+2)} < \dfrac{1}{k+1}$, de unde

$$\ln(n+1) - \ln 2 = \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(k+2) - \ln(k+1)) < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}.$$

Din principiul cutiei rezultă că există o dreaptă prin O care taie cel puţin

$$\left\lceil \frac{\Sigma}{\pi} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{2}{\pi}(\ln(n+1) - \ln 2) \right\rceil = \left\lceil \frac{2}{\pi} \ln \frac{n+1}{2} \right\rceil$$

discuri din $\mathcal{D}$ (împărţim la π, şi nu 2π, căci dreapta se extinde în ambele direcţii). $\square$

Remarcă. Condiţia $n \geq 3$ este prea tare; e suficient $n \geq 2$. Condiţia *(a)* este superfluă, căci discuri care conţin punctul O sunt tăiate de orice dreaptă prin O. Altfel, problema implică un simplu *argument de medie*, însoţit de o bine-cunoscută inegalitate pentru seria armonică trunchiată.

Soluţia oficială detaliază alegerea unui sistem distinct de reprezentanţi pentru discurile din $\mathcal{D}$, cu centre respectiv în discurile de centru O şi raze din $\{2, 3, \ldots, n\}$, ceea ce este absolut evident; invocarea teoremei lui Hall este aici echivalentă cu strivirea unei muşte cu un baros (după cum spunea undeva Serge Lang ...)!

Remarcă (**Adiţională**)**.** Pentru o mulţime $\mathcal{D}$ formată din $n-1$ discuri unitate, cu centrele la distanţe respectiv $2, 3, \ldots, n$ de O, vom avea

$$\Sigma = 2\sum_{\mathcal{D}} \arcsin\frac{1}{d} = 2\sum_{k=1}^{n-1} \arcsin\frac{1}{k+1} < 2\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{6(k+1)^2}\right),$$

din faptul că $\arcsin x < x + \dfrac{x^2}{6}$ pentru $x \in (0, 1/2]$. Deoarece avem şi $\dfrac{\ln(k+1) - \ln k}{(k+1) - k} = \dfrac{1}{\zeta}\Big|_{\zeta\in(k,k+1)} > \dfrac{1}{k+1}$, de unde

$$\ln(n+1) > \ln n = \sum_{k=1}^{n-1}(\ln(k+1) - \ln k) > \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1},$$

şi din $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{6(k+1)^2} < \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{6}\left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) < \frac{1}{6}\left(\frac{10}{6} - 1\right) = \frac{1}{9}$, rezultă

$$\Sigma < 2\left(\ln(n+1) + \frac{1}{9}\right) < 2\ln 2(n+1).$$

Dar atunci numărul mediu de discuri tăiate de o dreaptă prin O este cel mult

$$\left\lfloor\frac{\Sigma}{\pi}\right\rfloor \le \left\lfloor\frac{2}{\pi}\ln 2(n+1)\right\rfloor,$$

deci, dacă discurile sunt uniform distribuite, această majorare se aplică la numărul de discuri tăiate de orice dreaptă prin O.

Deoarece $0 < \dfrac{2}{\pi}\ln 2(n+1) - \dfrac{2}{\pi}\ln\dfrac{n+1}{2} = \dfrac{4}{\pi}\ln 2 < 1$, se dovedeşte că estimarea din enunţul problemei este cea mai bună posibilă.

Subiectul (2)**.** *Fie $n > 1$ un număr întreg, şi fie $\mathcal{S}$ familia submulţimilor cu n elemente ale mulţimii $\{1, 2, \ldots, 2n\}$. Determinaţi $\max\limits_{S\in\mathcal{S}}\ \min\limits_{x,y\in S, x\neq y}[x, y]$, unde prin $[x, y]$ am notat cel mai mic multiplu comun al numerelor întregi x şi y.*

Soluţie. Fie $S_0 = \{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$, a doua jumătate a mulţimii noastre (este de aşteptat ca această submulţime să joace un rol special). Soluţia se bazează pe ideea că, pentru orice submulţime $S \in \mathcal{S}$, orice element $x \in S$ are (măcar) un multiplu în S_0; dacă doi astfel de multipli, pentru elemente distincte $x, y \in S$, coincid, atunci $[x, y] \le 2n$, şi aceasta se va dovedi o valoare mai mică decât cea căutată (ideea apare deja în soluţia unei probleme din cartea lui A. Gica şi L. Panaitopol). Dacă toţi aceşti multipli sunt diferiţi, atunci mulţimea formată din ei este chiar S_0, şi deci există $x, y \in S$, $x \neq y$, pentru care un multiplu este $2(\lfloor n/2\rfloor + 1)$ iar celălalt $3(\lfloor n/2\rfloor + 1)$, de unde $[x, y] \le 6(\lfloor n/2\rfloor + 1)$, mai puţin pentru cazul $m = 4$, când se calculează imediat că valoarea căutată este 24, realizată de exemplu pentru $S = \{5, 6, 7, 8\}$. Mai rămâne de arătat că pentru $n \neq 4$ valoarea $6(\lfloor n/2\rfloor + 1)$

este efectiv realizată, şi anume chiar pentru submulţimea S_0. Pentru aceasta trebuie arătat că pentru $x, y \in S_0$, $x \neq y$, avem $[x, y] \geq 6(\lfloor n/2 \rfloor + 1)$, şi aceasta se face cu uşurinţă. $\square$

Subiectul (3)**.** *Fiind dat numărul întreg $n \geq 2$, determinaţi polinoamele ne-constante f cu coeficienţi complecşi care satisfac condiţia*

$$1 + f(X^n + 1) = f(X)^n.$$

Soluţie. Să considerăm cazul $f(0) \neq 0$. Fie ω o rădăcină primitivă de ordin n a unităţii. Atunci

$$f(\omega X)^n = 1 + f((\omega X)^n + 1) = 1 + f(\omega^n X^n + 1) = 1 + f(X^n + 1) = f(X)^n,$$

deci $f(\omega X) = \omega^m f(X)$ pentru un $0 \leq m < n$. Atunci $f(0) = \omega^m f(0)$, deci $\omega^m = 1$, adică $m = 0$, şi deci $f(\omega X) = f(X)$. Aceasta înseamnă că f este polinom în X^n, deci există un polinom g astfel încât $f(X) = g(X^n + 1)$. Fie $\phi(X) = X^n + 1$ şi $\psi(X) = X^n$; relaţia se scrie acum

$$1 + f(\phi(X)) = \psi(f(X))$$

şi avem şi $f(X) = g(\phi(X))$. Dar atunci

$$\psi(g(\phi(X))) = \psi(f(X)) = 1 + f(\phi(X)) = 1 + g(\phi(\phi(X))),$$

şi cum $\phi(X)$ nu este constant, aceasta implică şi $\psi(g(X)) = 1 + g(\phi(X))$, deci g este soluţie. Dacă acum $g(0) \neq 0$ repetăm raţionamentul. Deoarece gradele polinoamelor în chestiune descresc, înseamnă că toate soluţiile f cu $f(0) \neq 0$ provin din aplicarea repetată a raţionamentului de mai sus, pornind de la o soluţie g cu $g(0) = 0$, ceea ce revine la considerarea cazului $f(0) = 0$. Fie atunci şirul definit prin $x_0 = 0$ şi $x_{k+1} = x_k^n + 1$ pentru $k \in \mathbb{N}$. Avem $f(x_{k+1}) = f(x_k^n + 1) = f(x_k)^n - 1$ pentru $k \in \mathbb{N}$, şi deci $f(x_1) = -1$.

Dacă n este par, atunci $f(x_2) = f(x_1)^n - 1 = 0$, şi în general $f(x_{2k}) = 0$ şi $f(x_{2k-1}) = -1$ pentru $k \in \mathbb{N}$. Dar şirul $(x_k)_{k \geq 0}$ este strict crescător, deci termenii săi sunt toţi distincţi, ceea ce conduce la o evidentă contradicţie.

Deci n trebuie să fie impar; atunci rezultă prin inducţie $f(x_k) = -x_k$. Aceasta este adevărat pentru $k = 0$, şi avem pentru pasul de inducţie $f(x_{k+1}) = f(x_k)^n - 1 = (-x_k)^n - 1 = -(x_k^n + 1) = -x_{k+1}$. Şirul $(x_k)_{k \geq 0}$ având toţi termenii distincţi, rezultă cu obligativitate $f(X) = -X$.

Prin urmare, singura soluţie f cu $f(0) = 0$ este $f(X) = -X$ şi impune n impar; celelalte soluţii f (cu $f(0) \neq 0$) se obţin drept $f(X) = g(X^n + 1)$, unde g este o soluţie de grad mai mic. $\square$

Remarcă. Încă o problemă de tehnică algebrică destul de delicată, aplicată polinoamelor (de revăzut eleganta soluţie de la Problema 1 / Test 1, şi de asemenea Problema 4 / Test 3). Nu pot să nu mă întreb cât de adecvate sunt aceste întrebări în alegerea echipei pentru OIM, unde astfel de probleme sunt extrem de rare.

Printr-o remarcabilă coincidenţă, găsirea soluţiilor polinomiale ale ecuaţiei funcţionale

$$f(x^2+1) = f(x)^2 + 1$$

a fost cerută tot în aceeaşi zi, pe AoPS; vezi
`http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=296&t=535472.`

Metode similare cu cele de mai sus conduc la soluţiile f constant egal cu $\dfrac{1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$, apoi $f(x) = x$ ca singura soluţie cu $f(0) = 0$, şi toate celelalte (infinit de multe) soluţii cu $f(0) \neq 0$, obţinute prin $f(x) = g(x^2+1)$, unde g este şi ea o soluţie (de grad mai mic).

5. Seniori – Test 5

Subiectul (1)**.** *Fie n un număr natural nenul, şi fie $x_1, \ldots, x_n$ numere reale (strict) pozitive. Arătaţi că*

$$\min\left(x_1, \frac{1}{x_1}+x_2, \ldots, \frac{1}{x_{n-1}}+x_n, \frac{1}{x_n}\right) \leq 2\cos\frac{\pi}{n+2} \leq \max\left(x_1, \frac{1}{x_1}+x_2, \ldots, \frac{1}{x_{n-1}}+x_n, \frac{1}{x_n}\right).$$

Soluţie. Fie $X = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_k > 0, 1 \leq k \leq n\} = \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$. Se va arăta că de fapt $\displaystyle\max_{x\in X}\min\left(x_1, \frac{1}{x_1}+x_2, \ldots, \frac{1}{x_{n-1}}+x_n, \frac{1}{x_n}\right) = 2\cos\frac{\pi}{n+2}$, şi de asemenea că $\displaystyle\min_{x\in X}\max\left(x_1, \frac{1}{x_1}+x_2, \ldots, \frac{1}{x_{n-1}}+x_n, \frac{1}{x_n}\right) = 2\cos\frac{\pi}{n+2}$. Dacă vom căuta un element $a \in X$ pentru care cele două valori (minimă şi maximă) sunt egale, aceasta presupune evident egalitatea tuturor termenilor $a_1 = \dfrac{1}{a_1}+a_2 = \cdots = \dfrac{1}{a_{n-1}}+a_n = \dfrac{1}{a_n} = v$. Soluţia oficială obţine relaţii de recurenţă din care rezultă $v = 2\cos\dfrac{\pi}{n+2}$ şi $a_k = \dfrac{\sin\frac{(k+1)\pi}{n+2}}{\sin\frac{k\pi}{n+2}}$ pentru orice $1 \leq k \leq n$, dar acest lucru este deja sugerat de valoarea dată în enunţ, şi nu necesită decât o simplă verificare.

Vom arăta acum că pentru orice $x \in X$ avem

$$\min\left(x_1, \frac{1}{x_1}+x_2, \ldots, \frac{1}{x_{n-1}}+x_n, \frac{1}{x_n}\right) \leq \min\left(a_1, \frac{1}{a_1}+a_2, \ldots, \frac{1}{a_{n-1}}+a_n, \frac{1}{a_n}\right).$$

Presupunând contrariul, obţinem $x_1 > a_1$ şi $\dfrac{1}{x_k}+x_{k+1} > \dfrac{1}{a_k}+a_{k+1}$, $1 \leq k \leq n-1$, dar şi $\dfrac{1}{x_n} > \dfrac{1}{a_n}$; din primele inegalităţi rezultă însă prin inducţie $x_k > a_k$, $1 \leq k \leq n$, în particular $x_n > a_n$, absurd. Acelaşi tip de raţionament se aplică şi pentru valorile maxime, ceea ce demonstrează în mod complet cerinţele problemei, şi chiar mai mult. □

Subiectul (2)**.** *Fie K un patrulater convex şi fie ℓ o dreaptă prin punctul de intersecţie al diagonalelor lui K. Arătaţi că lungimea segmentului de intersecţie $\ell \cap K$ (interceptat de K pe ℓ) nu depăşeşte lungimea (cel puţin) uneia dintre diagonalele lui K.*

Soluţie. O problemă simpatică, de geometrie combinatorică metrică, cu o cerinţă intuitiv evidentă, dar care necesită totuşi o idee elegantă pentru a fi pusă în evidenţă. Mă mulţumesc să vă trimit la soluţia oficială, pentru satisfacerea curiozităţii. □

Subiectul (3)**.** *Given a positive integer n, consider a triangular array with entries $a_{i,j}$ where i ranges from 1 to n and j ranges from 1 to $n-i+1$. The entries of the array are all either 0 or 1, and, for all $i > 1$ and any associated j, $a_{i,j}$ is 0 if $a_{i-1,j} = a_{i-1,j+1}$, and $a_{i,j}$ is 1 otherwise. Let S denote the set of binary sequences of length n, and define a map $f\colon S \to S$ via $f : (a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,n}) \mapsto (a_{n,1}, a_{n-1,2}, \dots, a_{1,n})$. Determine the number of fixed points of f.*

Geoff Smith – MofM 2013 Extra List

Soluţie. Din păcate, problema nu mi-a plăcut încă de la început, de când am văzut-o. Poate soluţia extrem de tehnică şi formalizată mi-a produs o inhibiţie. Astfel, nu voi aduce niciun adaus la soluţia oficială, şi voi lăsa şi enunţul în limba lui de origine. De spus doar că valoarea căutată este $2^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}$, adică numărul cuvintelor binare palindromice de lungime n. □

6. Încheiere

Deşi pagina `http://ssmr.ro/pregatire_onm` anunţă, spre final,

> Barajele se vor desfăşura vineri şi sâmbătă (24-25 mai) cu câte patru probleme pentru juniori şi câte 3 (tip OIM) pentru seniori, în sala de şedinţe a hotelului Yesterday.

(desigur, fără semnele diacritice, puse aici) desfăşurătorul pe zile anunţă pentru seniori, aşa cum s-a produs în realitate, Testul 4 Joi şi Testul 5 Vineri (o zi după lecţiile de Miecuri). Ca să arăt cât de cârcotaş pot fi, trebuie să semnalez că în ziua Testului 4 seniori, joi 23 mai, între orele 14:00 şi 15:30, site-ul SSMR a fost "down", şi deci subiectele (şi soluţiile) nu au putut fi afişate. Au apărut, în fine, puţin înainte de orele 16:00. Dar link-ul • Subiecte Baraj 4 - seniori trimite de fapt la un material care conţine **şi** soluţiile oficiale! Şi link-ul de vineri • Subiecte Baraj 5 - seniori trimite tot la un material care conţine şi soluţiile oficiale (dar cel puţin a apărut la timp, ceea ce nu se poate spune şi despre Testul 4 juniori, din aceeaşi zi). Nici rezultatele finale pentru seniori, disponibile deja vineri la orele 18:00, nu apăruseră încă până la orele 22:00.[4]

[4]Rezultatele seniori au apărut spre miezul nopţii ... bun! Dar tot atunci a re-apărut şi un fişier rezultate juniori, care este vechi – de la primul test, din timpul Fazei Finale.

Trebuie să remarcăm şi titlul

PROGRAM DE PREGĂTIRE AL JUNIORILOR

care ar trebui să citească

PROGRAM DE PREGĂTIRE A JUNIORILOR

E adevărat că **programul** este **al** lor, dar mai ales **pregătirea** este **a** lor!

Pentru bună măsură, nu se putea să lipsească **încă una** dintre problemele de pe lista suplimentară, de probleme de schimb pentru concursul Master of Mathematics din martie 2013 ... *oh, well* ...

Rezultatul final al selecţiei seniori pentru **IMO 2013 (Columbia)** este

Nume	**Clasa**	**Şcoala**
Ştefan SPĂTARU	X	ICHB, Bucureşti
Ömer CERRAHOĞLU	XI	C.N. Gh. Şincai, Baia Mare
Andrei Viorel BUD	XI	ICHB, Bucureşti
Hai TRAN BACH	XI	ICHB, Bucureşti
Ştefan GRAMATOVICI	XI	C.N. T. Vianu, Bucureşti
Marius BOCANU	X	ICHB, Bucureşti

Rezultatul selecţiei seniori pentru **Tuymaada 2013 (Yakuţia)** este

Nume	**Clasa**	**Şcoala**
Simona DIACONU	X	ICHB, Bucureşti
Andreea MĂGĂLIE	XI	ICHB, Bucureşti
Ioan-Laurenţiu PLOSCARU	IX	C.N. A. Lahovari, Râmnicu-Vâlcea

Rezultatul selecţiei seniori pentru **BMO 2013 (Cipru)** a fost

Nume	**Clasa**	**Şcoala**
Ömer CERRAHOĞLU	XI	C.N. Gh. Şincai, Baia Mare
Ştefan SPĂTARU	X	ICHB, Bucureşti
Simona DIACONU	X	ICHB, Bucureşti
Marius BOCANU	X	ICHB, Bucureşti
Paul Gabriel MUSCĂ	XI	ICHB, Bucureşti
Andrei Viorel BUD	XI	ICHB, Bucureşti

Rezultatul final al selecţiei juniori pentru **jBMO 2013 (Turcia)** este

Nume	**Clasa**	**Şcoala**
Ioan-Laurenţiu PLOSCARU	IX	C.N. A. Lahovari, Râmnicu-Vâlcea
Teodor-Andrei ANDRONACHE	IX	ICHB, Bucureşti
Andrei PAŞA	VIII	Colegiul Naţional, Iaşi
Ciprian-Mircea BONCIOCAT	VII	C.N. T. Vianu, Bucureşti
Cristian TELEANU	IX	Liceul Teoretic Ovidius, Constanţa
Filip ION	VIII	Şcoala 56, Bucureşti

Într-un final, târziu sâmbătă seara, au apărut şi rezultatele finale juniori. Dar conţinutul Testelor 4 şi 5 juniori tot lipseşte. Noroc de spionii mei ... **În schimb, s-a revenit din greşeală la versiunea veche – de la primul test, din timpul Fazei Finale – pentru fişierul rezultate seniori, rezultatele finale dispărând în ether!** O simplă privire aruncată asupra rezultatului încărcării acestor fişiere ar fi remediat problema, dar m-am obişnuit deja cu lipsa oricărui control al muncii în spaţiul românesc.