COMENTARII OLIMPIADA DE MATEMATICĂ 2013
TESTE DE SELECŢIE

ABSTRACT. Comments on some of the problems given at the Selection Tests at the National Mathematics Olympiad 2013.

Data: 30 aprilie 2013.
Autor: Dan Schwarz, Bucureşti.

1. Introducere

Această prezentare, însoţită de comentarii asupra Testelor de Selecţie de la Faza Naţională a Olimpiadei de Matematică este, din nou, după cum v-am obişnuit, opinia personală a autorului.[1]

Voi indica prin culoarea **roşie** eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea **verde** varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea **albastră** pentru comentariile personale.

2. Juniori – Test 1

Subiectul (1)**.** *Fie* $a, b, c, d > 0$ *cu* $abcd = 1$*. Arătaţi că*

$$\frac{1}{a+b+2} + \frac{1}{b+c+2} + \frac{1}{c+d+2} + \frac{1}{d+a+2} \leq 1.$$

GHEORGHE ECKSTEIN

Soluţie. Hah, o problemă a veteranului Gyuri?!? Soluţia 2 oficială arată că, lucru nu rar pentru inegalităţi în patru variabile, inegalitatea se ”sparge” în două, grupând termenii unu cu trei, şi termenii doi cu patru.

Avem $\dfrac{1}{a+b+2} + \dfrac{1}{c+d+2} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{ab}+2} + \dfrac{1}{2\sqrt{cd}+2}$. Dar $\sqrt{cd} = 1/\sqrt{ab}$, şi atunci valoarea sumei din termenul dreapta de mai sus este $1/2$. O operaţie similară pentru ceilalţi doi termeni ai sumei iniţiale produce rezultatul dorit. Cazul de egalitate este evident pentru $a = b$, $c = d$, $b = c$, $d = a$, deci $a = b = c = d = 1$.

Din păcate, o inegalitate care se ”sparge” este oarecum slabă, cu un grad de dificultate relativ scăzut. □

Mulţumirile mele sincere celor cu care am dialogat cu privire la problemele propuse şi la efectele dorite, discuţii care au condus la materialul de faţă.

[1]Consultaţi subiectele în complet, soluţiile oficiale şi rezultatele acestor teste de selecţie la `http://ssmr.ro/onm2013`.

Soluţie Alternativă. Dacă ne chiar vine ideea "spargerii", o soluţie de forţă brută vine imediat.

Avem $\dfrac{1}{a+b+2}+\dfrac{1}{c+d+2}=\dfrac{a+b+c+d+4}{ac+ad+bc+bd+2(a+b+c+d)+4}$. Dar $ac+ad+bc+bd\geq 4\sqrt[4]{(abcd)^2}=4$, deci expresia de mai sus este cel mult egală cu $\dfrac{1}{2}$, cu egalitate pentru $a=b=c=d=1$. La fel pentru ceilalţi doi termeni. $\square$

Subiectul (2)**.** *Se dau greutăţile 1 g, 2 g, ..., 200 g şi se aşează câte 100 pe talerele unei balanţe. Demonstraţi că se pot schimba 50 de greutăţi din talerul stâng cu 50 de greutăţi din talerul drept, astfel încât balanţa să fie în echilibru.*

Soluţie. În limbaj de teoria grafurilor avem un graf $G=(V,E)$ cu mulţimea vârfurilor $V=\{1,2,\ldots,200\}$, şi $V=S\cup D$, $S\cap D=\emptyset$, $|S|=|D|=100$. Ideea este să luăm mulţimea muchiilor $E=\{\{u,v\}\mid u,v\in V, u+v=201\}$, deci $|E|=100$. Fie m numărul de muchii care leagă vârfuri din S cu vârfuri din D; atunci trebuie ca m să fie par, $m=2k$, şi există $50-k$ muchii între vârfurile lui S şi $50-k$ muchii între vârfurile lui D. Dacă $2k\geq 50$ putem crea S' ca fiind format din capetele a 50 de astfel de muchii, iar $D'=V\setminus S'$; dacă nu, atunci $50-k\geq 25$ şi putem crea S' din capetele a 25 de muchii din S şi capetele a 25 de muchii din D, iar $D'=V\setminus S'$. $\square$

Subiectul (3)**.** *În planul unui cerc de centru O şi rază r se consideră o dreaptă care nu trece prin O. O lăcustă sare dintr-un punct al cercului într-unul al dreptei, apoi înapoi pe cerc şi aşa mai departe, lungimea fiecărei sărituri fiind egală cu r. Demonstraţi că lăcusta poate ajunge în cel mult 8 puncte ale planului.*

Soluţie. Este evident de ce dreapta nu trebuie să treacă prin O; atunci mulţimea punctelor unde poate ajunge lăcusta este infinită, formată din centrul şi întreaga circumferinţă a cercului. Soluţia oficială are un desen bun, şi este suficient de bine scrisă pentru a mai adăuga aici ceva. Răspunsul de neaşteptatul număr 8 este plăcut vederii, în această problemă de provenienţă probabil rusească. $\square$

Subiectul (4)**.** *În triunghiul ascuţitunghic ABC, cu $AB\neq AC$, D este piciorul bisectoarei interioare din A, iar E şi F sunt picioarele înălţimilor din B, respectiv C. Cercurile circumscrise triunghiurilor DBF şi DCE se taie a doua oară în M. Arătaţi că $ME=MF$.*

Leonard Giugiuc

Soluţie. Mă ştiţi deja ... nu produc, ca de obicei, soluţii la problemele de geometrie clasică. O singură observaţie – ar fi bine-venită şi o soluţie care să nu se bizuie pe conceptul de axă radicală a două cercuri, mai puţin cunoscut celor mici ... *À bon entendeur, salut!* $\square$

Subiectul (5)**.**

a) Arătaţi că, pentru orice număr natural nenul n, există $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ pentru care mulţimea

$$A_n = \{a - b, a^2 - b^2, a^3 - b^3, \ldots, a^n - b^n\}$$

conţine doar numere naturale nenule.

b) Fie a şi b două numere reale diferite cu proprietatea că mulţimea

$$A = \{a^k - b^k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$$

conţine doar numere naturale nenule. Arătaţi că a şi b sunt numere întregi.

Soluţie. Un caz clasic de a pune căruţa înaintea boilor. Altfel decât a "ghici" un exemplu pentru punctul a), munca de a-l găsi printr-un "educated guess" este în fapt conţinută în punctul b). Era poate mai uşor pentru concurenţi dacă punctele a) şi b) erau inversate. Să începem deci invers. (Am "înroşit" cuvântul diferite, căci prin cererea ca A să conţină doar numere naturale nenule se forţează $|a| \neq |b|$).

b) Avem nevoie de $a - b = k$ şi $a^2 - b^2 = \ell$, cu $k, \ell \in \mathbb{N}^*$. De aici, $a + b = \dfrac{\ell}{k}$, şi deci $a = \dfrac{\ell + k^2}{2k}$, $b = \dfrac{\ell - k^2}{2k}$, deci a şi b sunt numere raţionale având acelaşi numitor în formă redusă (căci diferă printr-un întreg). Fie deci $a = \dfrac{p}{q}$ şi $b = \dfrac{r}{q}$, cu $q \in \mathbb{N}^*$, $p, r \in \mathbb{Z}^*$, $p > r$, $(p, q) = (r, q) = 1$. Atunci, pentru orice întreg pozitiv n avem

$$a^n - b^n = \frac{(p-r)\sum\limits_{j=1}^{n} p^{n-j} r^{j-1}}{q^n} = \frac{(p-r)\left(nr^{n-1} + \sum\limits_{j=1}^{n-1}(p^{n-j} - r^{n-j})r^{j-1}\right)}{q^n}.$$

Notând $a^j - b^j = m_j \in \mathbb{N}^*$ pentru orice $j \in \mathbb{N}^*$, rezultă

$$m_n = a^n - b^n = \frac{(p-r)\left(nr^{n-1} + q\sum\limits_{j=1}^{n-1} m_{n-j} q^{n-j-1} r^{j-1}\right)}{q^n}.$$

Dar atunci, pentru infinit de multele numere n coprime cu q, va trebui să avem $q^n \mid p - r$, aşadar $q = 1$, şi atunci a şi b vor fi numere întregi.

a) Acum este clar cum trebuie aleşi a şi b pentru un n dat. Este suficient să luăm $a = \dfrac{p}{q}$ şi $b = \dfrac{r}{q}$, cu $q \in \mathbb{N}^*$, $p, r \in \mathbb{Z}^*$, $p > r$, $(p, q) = (r, q) = 1$, şi $q^n \mid p - r$; de exemplu $b = \dfrac{1}{q}$ şi $a = \dfrac{q^n + 1}{q}$, cu $q > 1$, pentru a avea $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. $\square$

3. Juniori – Test 2

Subiectul (1)**.** *Arătaţi că dacă* $a, b, c > 0$ *şi* $a + b + c = 3$*, atunci*

$$\frac{a^2(b+1)}{ab+a+b} + \frac{b^2(c+1)}{bc+b+c} + \frac{c^2(a+1)}{ca+c+a} \geq 2.$$

Mathematical Excalibur

Soluţie. Una din soluţii aplică de două ori ”varianta Titu” a inegalităţii Cauchy-Schwarz. Cazul de egalitate reiese cu uşurinţă $a = b = c = 1$. □

Subiectul (2)**.** *Arătaţi că suma dintre un număr natural* n *şi răsturnatul său este divizibilă cu* 81 *dacă şi numai dacă suma cifrelor lui* n *este divizibilă cu* 81*.*

Andrei Eckstein

Soluţie. Miezul soluţiei este observaţia că $10^i + 10^{j+1} \equiv 10^j + 10^{i+1} \pmod{81}$ pentru orice numere naturale i, j, fie $i \geq j$, căci $(10-1)(10^i - 10^j) = 9 \cdot 10^j(10^{i-j} - 1) \equiv 0 \pmod{81}$. □

Subiectul (3)**.** *Se colorează submulţimile cu* 3 *elemente ale unei mulţimi cu* 7 *elemente, astfel încât oricare două submulţimi disjuncte să nu aibă aceeaşi culoare. Aflaţi numărul minim de culori necesare.*

KöMaL

Soluţie. Numărul $n = 7$ este prea mic; se pretează la o analiză exhaustivă, căci nu sunt decât $\binom{7}{3} = 35$ triplete. Problema trebuia dată pentru cazul general $n = 2k+1$, unde oricare două submulţimi disjuncte cu k elemente să nu aibă aceeaşi culoare, ori măcar pentru un număr potrivit, mai mare, de exemplu $n = 31$.

Pentru cazul $k = 2^m - 1$, $n = 2k+1$, două culori nu sunt suficiente. Pentru fiecare submulţime cu k elemente există $k+1$ alte astfel de submulţimi, disjuncte faţă de ea. Dar atunci, dacă $\mathcal{F}$ este familia submulţimilor colorate cu prima culoare, iar $\mathcal{G}$ este familia submulţimilor colorate cu a doua culoare, numărul total de perechi de mulţimi disjuncte va fi $(k+1)|\mathcal{F}| = (k+1)|\mathcal{G}|$, de unde $|\mathcal{F}| = |\mathcal{G}|$, imposibil, căci numărul total de submulţimi este

$$\binom{2k+1}{k} = \frac{(2^m + (2^m - 1)) \cdot (2^m + (2^m - 2)) \cdots (2^m + \ell) \cdots (2^m + 1)}{1 \cdot 2 \cdots (2^m - \ell) \cdots (2^m - 1)},$$

impar, căci $2^m + \ell$ şi $2^m - \ell$ se divid cu aceeaşi putere a lui 2, pentru orice $1 \leq \ell \leq 2^m - 1$.

Un model cu trei culori este precum urmează. Distingem două elemente x, y, şi colorăm cu prima culoare submulţimile cu k elemente diferite de x, y (două câte două ne-disjuncte, din principiul cutiei), colorăm cu a doua culoare submulţimile cu r elemente care îl conţin pe x, şi colorăm cu a treia culoare submulţimile cu k elemente care îl conţin pe y (submulţimile cu k

elemente care le conţin pe ambele x, y pot fi colorate cu oricare din ultimele două culori). Un alt model cu trei culori este precum urmează. Distingem un element x, şi colorăm cu prima culoare submulţimile cu k elemente care îl conţin pe x; celelalte vor fi submulţimi care nu îl conţin pe x, şi două culori sunt suficiente pentru ele, căci ele se partiţionează în perechi complementare.

Pentru cazul general $n = 2k + 1$, imposibilitatea a două culori se poate arăta după cum urmează. Considerăm numerele $1, 2, \ldots, 2k + 1$ ca puncte pe un cerc. Considerăm acum prima grupă de k fiind $\{1, 2, \ldots, k\}$, apoi o a doua grupă de k fiind $\{k + 1, k + 2, \ldots, 2k\}$, imediat adiacentă, apoi a treia $\{2k+1, 1, \ldots, k-1\}$, şi aşa mai departe. Dupa $n = 2k+1$ paşi, ne întoarcem la grupa de pornire, dar grupe adiacente sunt disjuncte, deci trebuie colorate diferit, şi astfel prima grupă primeşte şi a doua culoare, absurd. □

Remarcă. Celebra teoremă Erdös-Ko-Rado[2] afirmă că numărul maxim de submulţimi cu r elemente ale unei mulţimi cu $n \geq 2r$ elemente, două câte două ne-disjuncte, este $\binom{n-1}{r-1}$. Atunci, pentru $n = 2r + 1$, vom avea $\binom{n}{r} = \frac{n}{r}\binom{n-1}{r-1} = \frac{2r+1}{r}\binom{n-1}{r-1} > 2\binom{n-1}{r-1}$, deci două culori nu sunt suficiente, şi aceasta pentru orice r (chiar dacă $\binom{n}{r}$ este număr par).

Subiectul (4)**.** *Se consideră triunghiul ascuţitunghic ABC de ortocentru H. Punctul P este situat pe cercul circumscris triunghiului ABC. Demonstraţi că mijlocul segmentului HP este situat pe dreapta lui Simson asociată punctului P în raport cu triunghiul ABC.*

Soluţie. Mă ştiţi deja ... nu produc, ca de obicei, soluţii la problemele de geometrie clasică. Dar puteţi găsi o soluţie pe `wiki`, la articolul despre dreapta lui Simson,[3] ha ha. Copiii însă n-au făcut-o (cu două excepţii). □

4. Juniori – Test 3

Subiectul (1)**.** *Fie n un număr natural nenul. Determinaţi toate numerele naturale nenule p pentru care există numerele naturale nenule*

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_n,$$

astfel încât

$$\frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2} + \cdots + \frac{n}{x_n} = p.$$

Irish Mathematical Olympiad

[2] `http://en.wikipedia.org/wiki/Erd%C5%91s%E2%80%93Ko%E2%80%93Rado_theorem`
[3] `http://en.wikipedia.org/wiki/Simson_line`

Soluţie. Pentru $x_k = k$, $1 \leq k \leq p-1$ şi $x_k = (n-p+1)k$, $p \leq k \leq n$, vom avea pentru orice $1 \leq p \leq n$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2} + \cdots + \frac{n}{x_n} = \frac{p-1}{1} + \frac{n-p+1}{n-p+1} = p,$$

iar deoarece trebuie $x_k \geq k$ pentru orice $1 \leq k \leq n$ avem şi

$$\frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2} + \cdots + \frac{n}{x_n} \leq n,$$

deci numerele p căutate sunt $\{1, 2, \ldots, n\}$. □

Subiectul (2)**.** *Determinaţi numerele naturale nenule x, y, z astfel încât*

$$7^x + 13^y = 8^z.$$

Lucian Petrescu

Soluţie. Avem $(-1)^x + 1^y \equiv 0 \pmod 4$, deci x este impar. Acum, totul se reduce la faptul că $8 = 2^3$, şi la proprietăţi particulare ale resturilor modulo 13. Avem tabelul de resturi

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
7^n	1	7	10	5	9	11	-1	-7	-10	-5	-9	-11	1
8^n	1	8	-1	-8	1	8	-1	-8	1	8	-1	-8	1

şi deci singura posibilitate pentru $7^x \equiv 8^z \pmod{13}$ este $\pm 5 \equiv \mp 8 \pmod{13}$, prin urmare $x = 3t$, multiplu (impar) de 3. Dar atunci

$$13^y = 8^z - 7^x = (2^z)^3 - (7^t)^3 = (2^z - 7^t)(2^{2z} + 2^z 7^t + 7^{2t})$$

şi, deoarece $(2^z - 7^t, 2^{2z} + 2^z 7^t + 7^{2t}) \mid 3$, rezultă $2^z - 7^t = 1$, evident posibil doar pentru $z = 3$, $t = 1$ (ne uităm modulo 16), când $x = 3$, $y = 2$, $z = 3$, şi $\boxed{7^3 + 13^2 = 8^3}$.

Una peste alta, o soluţie mult mai lizibilă şi aerisită decât soluţia oficială. Efortul de a produce o astfel de soluţie nu este irosit, cred (sau sper) ... □

Subiectul (3)**.** *Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Arătaţi că tangenta comună exterioară a cercurilor înscrise în triunghiurile ABC şi respectiv BCD, diferită de BC, este paralelă cu AD.*

Ştefan Spătaru

Soluţie. No comment. Un singur rezolvitor. Lucrurile stau rău. □

Subiectul (4)**.** *Determinaţi toate numerele naturale nenule $n \geq 2$ care au proprietatea că există o permutare $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a mulţimii $\{1, 2, \ldots n\}$ pentru care numerele*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k, \ k = 1, 2, \ldots, n,$$

dau resturi distincte la împărţirea cu n.

Emil Vasile

Soluţie. O mică notă metodologică. O permutare a elementelor unei mulţimi presupune **ordonarea elementelor**; nu este de aceea indicat să fie notată, ca în enunţul original (corectat de mine mai sus), cu $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Să notăm $s_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Deoarece trebuie $a_{k+1} = s_{k+1} - s_k \not\equiv 0 \pmod n$ pentru toţi $k = 1, 2, \ldots, n-1$, rezultă obligatoriu $a_1 = n$. Apoi, deoarece $s_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, rezultă $\boxed{n \text{ par}}$, altfel $s_n \equiv s_1 \equiv 0 \pmod n$. Fie deci $n = 2m$.

Dar permutarea $(a_1, a_2, \ldots, a_{2m}) = (2m, 1, 2(m-1), 3, \ldots, 2, 2m-1)$ are proprietatea cerută, căci pentru $1 \le k \le m$

- $s_{2k} = 2 \displaystyle\sum_{j=m-k+1}^{m} j + \sum_{j=1}^{k} (2j-1) = k(2m+1)$;
- $s_{2k-1} = s_{2k} - (2k-1) = k(2m+1) - (2k-1) = k(2m-1) + 1$.

Însă acum

- $s_{2k} - s_{2\ell} = (k-\ell)(2m+1) \equiv k - \ell \not\equiv 0 \pmod{2m}$;
- $s_{2k-1} - s_{2\ell-1} = (k-\ell)(2m-1) \equiv \ell - k \not\equiv 0 \pmod{2m}$;
- $s_{2k} - s_{2\ell-1} = k(2m+1) - \ell(2m-1) - 1 \equiv k + \ell - 1 \not\equiv 0 \pmod{2m}$,

căci $1 \le k + \ell - 1 \le 2m - 1$.

Vectorul resturilor este $(s_1, s_2, \ldots, s_{2m}) \equiv (0, 1, -1, 2, -2, \ldots, m)$. $\square$

O problemă absolut similară a fost dată la Olimpiada Naţională din Canada, în acelaşi an al Domnului 2013. *Les grands esprits se rencontrent*?

5. Seniori – Test 1

Subiectul (1)**.** *Fie $n \ge 2$ un număr natural şi a_n, b_n, c_n numere întregi, astfel încât $(\sqrt[3]{2} - 1)^n = a_n + b_n\sqrt[3]{2} + c_n\sqrt[3]{4}$. Să se arate că $c_n \equiv 1 \pmod 3$ dacă şi numai dacă $n \equiv 2 \pmod 3$.*

Soluţie. (Marian Andronache) Considerăm polinomul

$$f = (X-1)^n - (c_nX^2 + b_nX + a_n) \in \mathbb{Z}[X].$$

Evident $f(\sqrt[3]{2}) = 0$. Deoarece polinomul $X^3 - 2$ este ireductibil în $\mathbb{Z}[X]$, rezultă că $X^3 - 2$ divide f în $\mathbb{Z}[X]$, deci $g_n = a_n + b_nX + c_nX^2$ este restul împărţirii polinomului $(X-1)^n$ la $X^3 - 2$ în $\mathbb{Z}[X]$.

Scriind $n = 3q+r$ (din algoritmul lui Euclid), deci cu $r \in \{0, 1, 2\}$, obţinem $(X-1)^n = ((X-1)^3)^q(X-1)^r = (X^3-1)^q(X-1)^r = (X^3-2)g + (X-1)^r$ în $\mathbb{Z}_3[X]$, de unde $g_n = (X-1)^r$ în $\mathbb{Z}_3[X]$. Prin urmare, $c_n \equiv 0 \pmod 3$ dacă $r \in \{0, 1\}$, şi $c_n \equiv 1 \pmod 3$ dacă $r = 2$. $\square$

Subiectul (3)**.** *Să se determine funcţiile injective $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, care au proprietatea că dacă S este o mulţime finită de numere naturale nenule, astfel încât $\displaystyle\sum_{s \in S} \frac{1}{s}$ este un număr întreg, atunci şi $\displaystyle\sum_{s \in S} \frac{1}{f(s)}$ este un număr întreg.*

Soluţie. Pentru cei care au cunoştinte din teoria Fracţiilor Egiptene (unde identitatea $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$ joacă un rol important), problema nu ar trebui să fie decât un simpatic exerciţiu de a introduce aceste cunoştinţe în inegalităţi potrivite pentru a obţine rezultatul, aşteptat de altfel, că singura astfel de funcţie este identitatea lui $\mathbb{N}^*$. Cu toate acestea, puţini concurenţi au obţinut mai mult decât jumătate din punctajul disponibil. $\square$

Subiectul (4)**.** *Mulţimea S a diagonalelor unui poligon convex cu $4n-1$ laturi, $n \geq 2$, este partiţionată în $k \geq 2$ mulţimi $S_1, \ldots, S_k$, astfel încât, oricare ar fi i şi j doi indici distincţi, există o diagonală în S_i şi una în S_j, care au un punct interior comun. Să se determine cea mai mare valoare posibilă a lui k în funcţie de n.*

Soluţie. O analiză a primului caz netrivial, $n = 2$, ne poate sugera că un maxim posibil de $(n-1)(4n-1)$, jumătate din $|S| = \frac{1}{2}(4n-1)(4n-4)$, numărul total de diagonale, poate fi atins. Că acesta este un maxim potenţial reiese imediat din principiul cutiei, căci pentru $k > (n-1)(4n-1)$ măcar una dintre mulţimile S_i va fi un singleton, iar numărul maxim de diagonale care au un punct interior comun cu această singură diagonală se calculează cu uşurinţă a fi mai mic decât $k-1$.

Un model maximal va trebui deci să aibă $|S_i| = 2$ pentru toţi indicii $1 \leq i \leq (n-1)(4n-1)$. Construcţia nu este chiar imediată, dar nici catastrofal de complicată. Cu toate acestea, poate şi pentru faptul că timpul se împuţinează la atingerea problemei 4, o mână de concurenţi au obţinut un punctaj diferit de zero; scorul maxim a fost de 4 puncte. $\square$

6. Seniori – Test 2

Subiectul (1)**.** *Fie a şi b două numere reale distincte, strict pozitive, astfel încât $\lfloor na \rfloor$ divide $\lfloor nb \rfloor$, oricare ar fi numărul natural nenul n. Să se arate că numerele a şi b sunt întregi.*

Marius Cavachi

Soluţie. Manevra clasică este să calculăm $\lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor nb \rfloor}{\lfloor na \rfloor} = \frac{b}{a}$, căci vom avea $\frac{nb-1}{na} < \frac{\lfloor nb \rfloor}{\lfloor na \rfloor} < \frac{nb}{na-1}$ pentru n suficient de mare; pe de altă parte şirul $\left(\frac{\lfloor nb \rfloor}{\lfloor na \rfloor}\right)_{n\geq 1}$ este format din întregi pozitivi, deci este constant egal cu un întreg $m \geq 2$ de la un rang încolo, aşadar $b = ma$ şi $\lfloor nma \rfloor = m\lfloor na \rfloor$ pentru n suficient de mare. Dar atunci $na < \lfloor na \rfloor + \frac{1}{m}$, şi cunoştinţe elementare despre comportarea lui $\{na\}$ (lemele lui Kronecker sau Weyl, când a este iraţional, şi posibilităţile finite, echidistante, când a este raţional) conduc la faptul că a (şi deci şi b) trebuie să fie număr natural nenul. $\square$

Soluţie Alternativă. (Tran Bach Hai) Fie, ca mai sus, pentru n suficient de mare, $A = na = \alpha + \overline{0,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t\ldots}_{(2)}$ şi $B = nb = m\alpha + \overline{0,\beta_1\beta_2\ldots\beta_t\ldots}_{(2)}$, cu $\alpha \in \mathbb{N}^*$ şi $\alpha_j, \beta_j \in \{0,1\}$ pentru toţi $j \in \mathbb{N}^*$. Atunci, pentru orice $t \in \mathbb{N}^*$ avem $\lfloor 2^t A \rfloor = 2^t\alpha + \overline{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t}_{(2)}$ şi $\lfloor 2^t B \rfloor = 2^t m\alpha + \overline{\beta_1\beta_2\ldots\beta_t}_{(2)}$, egal cu $m\lfloor 2^t A \rfloor = 2^t m\alpha + m \cdot \overline{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t}_{(2)}$. De aici rezultă $\alpha_t = \beta_t = 0$, pentru toţi $t \in \mathbb{N}^*$ (căci $m \geq 2$), deci A este număr întreg, prin urmare a este număr raţional cu numitor n. Deoarece n este arbitrar suficient de mare, rezultă a (şi atunci şi b) număr întreg. □

Subiectul (3)**.** *Fie S mulţimea numerelor raţionale de forma*

$$\frac{(a_1^2 + a_1 - 1)(a_2^2 + a_2 - 1)\cdots(a_n^2 + a_n - 1)}{(b_1^2 + b_1 - 1)(b_2^2 + b_2 - 1)\cdots(b_n^2 + b_n - 1)},$$

unde $n, a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ parcurg mulţimea numerelor naturale nenule. Să se arate că mulţimea S conţine o infinitate de numere prime.

Soluţie. O veche conjectură a lui Bunyakovsky este că, sub condiţii evidente, un polinom f cu coeficienţi întregi ia infinit de des valori prime. Nu se cunoaşte în afirmativ decât cazul $\deg f = 1$ (teorema lui Dirichlet). Un caz special este conjectura F a lui Hardy şi Littlewood, pentru cazul $\deg f = 2$. Polinomul $f(x) = x^2 + x - 1$ este de acest tip.

Problema de faţă încearcă deci să găsească o formă mai slabă, demonstrabilă, a acestor idei. Dacă am fi lucrat cu polinomul $g(x) = x^2 + 1$, se ştie (şi este uşor de demonstrat) că orice factor prim p al lui $g(n)$ este $p = 2$ sau $p \equiv 1 \pmod 4$. Dar $2 = 1^2 + 1$, $5 = 2^2 + 1$, în timp ce $13 = \dfrac{5^2+1}{1^2+1}$. Aceasta sugerează o inducţie pentru a arăta că pentru orice număr prim (distins) $p \equiv 1 \pmod 4$ există liste finite N şi M de numere întregi pozitive, astfel încât

$$p = \frac{\prod_{n\in N} g(n)}{\prod_{m\in M} g(m)}.$$

În problema de faţă, numerele prime distinse sunt 5 şi $p \equiv \pm 1 \pmod 5$.

O mică scăpare în soluţia oficială este lipsa observaţiei că, deoarece avem $1 = 1^2 + 1 - 1$, putem într-adevăr presupune că avem tot atâţia factori la numărător, cât şi la numitor; din fericire, căci pentru $g(x) = x^2 + 1$ acest lucru n-ar mai fi fost posibil! □

Subiectul (4)**.** *Fie k un număr întreg mai mare sau egal cu 2. Să se construiască o mulţime infinită $\mathcal{A}$ de mulţimi de numere naturale, care îndeplineşte simultan următoarele două condiţii*

(a) oricare k mulţimi distincte din $\mathcal{A}$ au exact un element comun; şi

(b) oricare $k + 1$ mulţimi distincte din $\mathcal{A}$ au intersecţia vidă.

Andrei Ciupan

Soluţie. Exact cazul exclus $k = 1$ ne sugerează ideea. Atunci elementele lui $\mathcal{A}$ sunt singletoane, şi (b) este trivial îndeplinită.

Familia $\mathcal{P}_k$ a părţilor cu k elemente ale lui $\mathbb{N}$ este evident numărabilă; putem indicia o astfel de submulţime $K = \{n_1, n_2, \ldots, n_k\} \subset \mathbb{N}$ cu indicele $i_K = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \cdots + 2^{n_k}$. Considerăm acum, *after a fashion*, mulţimile "duale" $A_n = \{i_K \mid n \in K_{i_K}\}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Oricare două astfel de mulţimi A_p şi A_q sunt evident disjuncte, căci există părţi cu k elemente ale lui $\mathbb{N}$ care separă p şi q. Dar atunci familia $\mathcal{A} = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ satisface ambele condiţii, în mod trivial

(a) $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k} A_{n_i} = \{i_K\}$, unde $K = \{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$;

(b) $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k+1} A_{n_i} \subseteq \{i_K\} \cap \{i_{K'}\} = \emptyset$, unde în plus $K' = \{n_2, n_3, \ldots, n_{k+1}\}$. □

7. Seniori – Test 3

Subiectul (1). *Fie a şi b două numere naturale distincte libere de pătrate. Arătaţi că există $c > 0$ astfel încât*

$$\left|\{n\sqrt{a}\} - \{n\sqrt{b}\}\right| > \frac{c}{n^3},$$

pentru orice număr natural nenul n.

Soluţie. Numărul $\lambda = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ este un întreg algebric de grad 4; polinomul său minimal este

$$\prod(x \pm \sqrt{a} \pm \sqrt{b}) = x^4 - 2(a+b)x^2 + (a-b)^2 \in \mathbb{Z}[x].$$

Condiţia ca a, b să fie libere de pătrate este pentru a asigura că $\sqrt{ab}$ este iraţional, şi deci gradul lui λ este 4. Teorema de aproximare Liouville afirmă că pentru un număr algebric λ de grad d există o constantă reală pozitivă c astfel încât

$$\left|\lambda - \frac{m}{n}\right| > \frac{c}{n^d},$$

pentru orice întregi pozitivi m, n, deci în cazul nostru $|n\lambda - m| > \dfrac{c}{n^3}$, adică $\min\{\{n\lambda\}, 1 - \{n\lambda\}\} > \dfrac{c}{n^3}$. Dar aceasta este evident echivalent cu $\left|\{n\sqrt{a}\} - \{n\sqrt{b}\}\right| > \dfrac{c}{n^3}$. □

Din teorema de aproximare Thue-Siegel-Roth rezultă chiar mai mult, anume că pentru orice $\varepsilon > 0$ există o constantă reală pozitivă $c(\varepsilon)$ astfel încât

$$\left|\lambda - \frac{m}{n}\right| > \frac{c(\varepsilon)}{n^{2+\varepsilon}},$$

şi atunci $|n\lambda - m| > \dfrac{c(\varepsilon)}{n^{1+\varepsilon}}$.

Pe de altă parte, teorema de aproximare Dirichlet afirmă că ecuaţia
$$\left|\lambda - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{n^2}$$
este satisfăcută pentru infinit de multe numere întregi m, n, deci exponentul $2+\varepsilon$ este cel mai bun posibil.

Mă întreb despre rostul acestei probleme ... Deşi unii au căutat să mă convingă de beneficiul ei, nu prea mă las convins că este apropriată.

Subiectul (2)**.** *Fie γ un cerc şi P un punct în planul său, exterior lui γ. Două drepte variabile, ℓ şi ℓ', care trec prin punctul P, intersectează cercul γ în punctele X şi Y, respectiv X' şi Y', astfel încât X este între P şi Y sşi X' iîntre P şi Y'. Să se arate că dreapta determinată de centrele cercurilor PXY' şi $PX'Y$ trece printr-un punct fix.*

G. Buicliu, Problema 777, GM-B

Soluţie. Problema se afla iniţial pe lista de probleme destinate testelor de juniori, cu menţiunea ”prea grea”. Na, că am ajuns să folosim probleme din î.e.n., cum cineva, undeva, comisese comentariul acesta hazliu.

Erorile de semne diacritice nu aparţin însă generalului Buicliu, cred ...

Simetrizând oricare dintre configuraţii faţă de dreapta PO, care trece prin P şi centrul O al cercului γ, noua linie a centrelor va fi şi ea simetrica celei vechi faţă de PO, deci punctul fix Ω va trebui să se afle pe dreapta PO, iar poziţia sa poate fi precizată dintr-un caz particular, ca fiind centrul cercului circumscris triunghiului format din P şi punctele de tangenţă la γ din P (triunghiul format de tangentele din P şi polara lui P). Dar acesta este chiar mijlocul segmentului PO.

Următoarea soluţie a fost dată în GM-B (printre alţii de I. Sanielevici). Printr-o inversiune convenabilă de pol P, cercul γ rămâne invariat, cele două cercuri circumscrise se transformă în dreptele XY' şi $X'Y$, iar al doilea punct Q de intersecţie al celor două cercuri circumscrise (punctul Miquel) se transformă în punctul $Z = XY' \cap X'Y$. Locul geometric al lui Z fiind polara lui P faţă de γ, este transformatul cercului având PO drept diametru. Linia centrelor din figura originală este deci mediatoarea lui PQ, şi trece prin mijlocul segmentului PO. $\square$

Subiectul (3)**.** *Să se determine cel mai mare număr întreg r, care are proprietatea că printre oricare cinci submulţimi de cardinal* 500 *ale mulţimii* $\{1, 2, \ldots, 1000\}$, *există două care au în comun cel puţin r elemente.*

Soluţie. Încă o problemă-deşeu a (listei ”lungi” a) concursului Master of Mathematics din martie 2013. Tocmai ce îmi notasem, când o văzusem, că speram să fie aruncată la o parte, căci, deşi în enunţul său original era vorba de şase submulţimi, problema este o repetare a problemei cu ”haina peticită a cerşetorului” din cartea lui A. Engel. Iată că a fost acum refolosită, chiar în versiunea din Engel, cu cinci submulţimi!

Să lucrăm cu o mulţime A având $|A| = 2n$ elemente, şi cinci submulţimi $A_i \subset A$ având $|A_i| = n$ pentru $1 \leq i \leq 5$. Notăm cu α_k, $0 \leq k \leq 5$, numărul elementelor lui A conţinute în exact k dintre submulţimile A_i. Atunci

$$\begin{array}{rcrrrrrrcl} |A| & = & \alpha_0 + & \alpha_1 + & \alpha_2 + & \alpha_3 + & \alpha_4 + & \alpha_5 & = & 2n \\ \sum\limits_{1\leq i\leq 5} |A_i| & = & & \alpha_1 + & 2\alpha_2 + & 3\alpha_3 + & 4\alpha_4 + & 5\alpha_5 & = & 5n \\ \sum\limits_{1\leq i<j\leq 5} |A_i \cap A_j| & = & & & \alpha_2 + & 3\alpha_3 + & 6\alpha_4 + & 10\alpha_5 & = & M \end{array}$$

Rezultă că

$$4n = 2\sum_{1\leq i\leq 5} |A_i| - 3|A| = M - (3\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_4 + 3\alpha_5) \leq M,$$

prin urmare există indicii $1 \leq i < j \leq 5$ astfel ca $|A_i \cap A_j| \geq \dfrac{4n}{10} = \dfrac{2n}{5}$. Egalitate apare pentru $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$, când

$$\alpha_2 + \alpha_3 = 2n \text{ şi } 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 5n,$$

adică $\alpha_2 = \alpha_3 = n$. Ca să poată fi obţinută lucrând cu numere întregi, avem nevoie de $5 \mid n$. Dacă avem şi $2 \mid n$, atunci un simplu model apare – considerăm 10 molecule formate fiecare din $n/10$ atomi, indexate prin cele 10 dublete $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$ şi 10 molecule formate fiecare din $n/10$ atomi, indexate prin cele 10 triplete $\{i, j, k\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$, şi atribuim fiecare moleculă acelor submulţimi A_ℓ cu $\ell \in \{i, j\}$ şi/sau $\ell \in \{i, j, k\}$.

Atunci $|A_\ell| = 4(n/10) + 6(n/10) = n$ şi $|A_i \cap A_j| = n/10 + 3(n/10) = \dfrac{2n}{5}$.

În cazul nostru, pentru $n = 500$, rezultă că $|A_i \cap A_j| \geq 200$, cu model pentru 200, deci $\boxed{r = 200}$. □

Cu atât mai surprinzător este faptul că, pentru cei 25 cei mai buni ”olimpici” din ţară rămaşi în cursă, vectorul notelor a fost

$$(a_7, a_6, a_5, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0) = (2, 1, 0, 0, 1, 3, 1, 17),$$

cel mai prost din concurs (mai scăzut chiar decât cel de la problema 4, care este un exerciţiu de tehnică algebrică destul de dificil).

Remarcă. Dacă am avea şase astfel de submulţimi, acelaşi rezultat este obţinut (prin aceleaşi metode), cu egalitate pentru $\alpha_2 = 0$ şi $\alpha_3 = 2n$. Ca să poată fi obţinută lucrând cu numere întregi, avem nevoie de $5 \mid n$. Dacă avem şi $2 \mid n$, atunci un simplu model apare – considerăm 20 de molecule formate fiecare din $n/10$ atomi, indexate prin cele 20 de triplete $\{i, j, k\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, şi atribuim fiecare moleculă acelor submulţimi A_ℓ cu $\ell \in \{i, j, k\}$.

Atunci $|A_\ell| = 10(n/10) = n$ şi $|A_i \cap A_j| = 4(n/10) = \dfrac{2n}{5}$.

Subiectul (4)**.** *Fie f şi g două polinoame cu coeficienţi întregi, astfel încât $\deg f > \deg g$ şi $\deg f \geq 2$. Să se arate că, dacă există o infinitate de numere prime p, astfel încât polinomul $pf + g$ are o rădăcină raţională, atunci polinomul f are o rădăcină raţională.*

Soluţie. Fie $r_p = \dfrac{a_p}{b_p}$ (cu $(a_p, b_p) = 1$) o rădăcină raţională a lui $pf + g$. Deoarece evident $\lim\limits_{|z|\to\infty} \left|\dfrac{g(z)}{f(z)}\right| = 0$ (cu $z \in \mathbb{C}$), rezultă că mulţimea valorilor r_p este mărginită.

Fie α coeficientul dominant al lui f; atunci $b_p \mid p\alpha$. Dacă într-o infinitate de cazuri s-ar întâmpla ca $b_p \mid \alpha$, atunci numărul valorilor r_p corespunzătoare este finit, deci vor exista două numere prime distincte p, q cu $r_p = r_q = r$, dar atunci $(p - q)f(r) = 0$, deci $f(r) = 0$. Dacă nu, înseamnă că, în afară de un număr finit de cazuri, $p \mid b_p$, deci $b_p = pc_p$, cu $c_p \mid \alpha$, şi deci $pc_px - a_p \mid pf(x) + g(x)$, aşadar $pf(x) + g(x) = (pc_px - a_p)h_p(x)$, cu $h_p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ (din lemma lui Gauss). Atunci într-o infinitate de cazuri vom avea $c_p = c$, constant, şi coeficientul dominant al lui h_p va fi constanta α/c.

Rădăcinile (complexe ale) lui h_p fiind mărginite în modul, din relaţiile lui Viète rezultă că şi coeficienţii săi sunt mărginiţi; fiind numere întregi, înseamnă ca iau un număr finit de valori, deci $h_p = h$, un acelaşi polinom, într-o infinitate de cazuri. Atunci vor exista două numere prime distincte p, q pentru care $h(x) \mid (p - q)f(x)$. Deoarece $\deg h = \deg f - 1$, rezultă că f are un factor de grad 1, şi deci are o rădăcină raţională. □

8. Încheiere

Nu numai că site-ul SSMR nu socoteşte necesară folosirea diacriticelor pe pagina consacrată Testelor de Selecţie, dar mănâncă şi litere – formularea ”în urma rezulatelor” sună aproape obscen ☺. Nu-i nimic, nici enunţurile problemelor nu sunt totdeauna scutite de acest benign viciu ...

Fără punctele de *carry-over* de la clasă, rezultatele de la Seniori sunt cam proaste, n'est-ce-pas? (deşi nu chiar atât de slabe ca anul trecut). Şi pentru că vorbim de carry-over, să clarificăm modul său de calcul. La fiecare clasă punctajul maxim posibil este $4 \cdot 7 = 28$ de puncte. Fie $m \leq 28$ punctajul celui mai bine clasat la acea clasă, şi fie s scorul oricăruia dintre concurenţii de la acea clasă. Sistemul de carry-over prevede acordarea unui punctaj maxim de 20 de puncte către testul de selecţie, indiferent de valoarea lui m. Eram sub impresia că se va aplica o banală regulă-de-trei-simplă, care va calcula o valoare proporţională a punctajului $t(s)$ de carry-over care înlocuieşte punctajul s de la clasă, dată de formula $t(s) = 20 \cdot \dfrac{s}{m} = 20\left(1 - \dfrac{m-s}{m}\right)$. Într-adevăr, vom avea atunci $t(m) = 20$ şi $t(0) = 0$, ceea ce pare rezonabil. În realitate, formula în uz a fost $\tau(s) = 20\left(1 - \dfrac{m-s}{28}\right)$, pentru care avem

$\tau(m) = 20$ şi $\tau(0) = 20\left(1 - \frac{m}{28}\right) \geq 0$ (egalitate cu 0 numai dacă $m = 28$). Un prim efect imediat este că $\tau(s) \geq t(s)$, cu egalitate numai dacă $m = 28$, şi cu discrepanţa cu atât mai mare cu cât m este mai mic decât 28, ceea ce produce o inflaţie a punctelor de carry-over, şi în acelaşi timp o diminuare a diferenţelor de carry-over între participanţi. *Cui prodest*?

Subiectul 1, Test 1, de la Seniori s-a dovedit a fi o non-problemă – dintre primii 25 clasaţi, toţi au luat punctaj maxim 7/7, mai puţin unul, cu 5/7 ! Cel puţin, se pretinde original, fiind propus de o pereche de notorii autori români ... Sunt în măsură să confirm că subiectele 2,3 şi 4 din Testul 1 Seniori au fost împrumutate **din aceeaşi listă suplimentară, de probleme de schimb pentru concursul Master of Mathematics din martie 2013**. Este nu numai periculos de a împrumuta astfel probleme dintr-un acelaşi document ... dar şi puţin cam penibil pentru originalitatea testului. De altfel, şi alte probleme din aceeaşi listă şi-au găsit şi ele locul în acest an. *Où sont les neiges d'antan?*