

PREZENTARE CONCURSUL "CUPA DUNĂRII" CĂLĂRAȘI 2014

ABSTRACT. Presentation with solutions for the problems asked at the Juniors and Seniors Tests of the Danube Cup competition, Călărași 2014.

Data: 20 octombrie 2014.

Autor: Dan S – București.

*Il faut imaginer Sisyphe heureux.*¹

0. INTRODUCERE

Această prezentare, însoțită de comentarii și de soluții ale autorului, asupra Testelor Juniori și Seniori de la concursul Cupa Dunării, Călărași 2014, este, după cum ne-am obișnuit, opinia personală a autorului.²

Voi indica prin culoarea **roșie** eventualele erori, sau notațiile abuzive din enunțurile originale, și prin culoarea **verde** varianta de preferat (sau care lipsește din enunț sau soluție). Voi folosi în mod predilect și culoarea **albastră** pentru comentariile personale.

1. TESTUL CUPA DUNĂRII – JUNIORI

Subiectul (1). Determinați **numărul** natural $a = \frac{p+q}{r} + \frac{q+r}{p} + \frac{r+p}{q}$, unde p, q și r sunt numere prime **pozitive**.

LUCIAN PETRESCU

Soluție. Dacă $p = q = r$ atunci $\boxed{a = 6}$. Dacă $p = q \neq r$ atunci trebuie $pr \mid 2(p^2 + r^2)$, deci $p \mid 2r^2$ și $r \mid 2p^2$, imposibil. Dacă p, q, r sunt distincte atunci trebuie $pqr \mid pq(p+q) + qr(q+r) + rp(r+p)$, deci $p \mid qr(q+r)$, $q \mid rp(r+p)$, $r \mid pq(p+q)$, adică $p \mid q+r$, $q \mid r+p$, $r \mid p+q$. Prin urmare $pqr \mid p+q+r$, de unde $pqr \leq p+q+r$, adică $\frac{3}{4} > \frac{1}{pq} + \frac{1}{qr} + \frac{1}{rp} \geq 1$, imposibil. \square

Remarcă. Un prim defect este folosirea cuvântului articulat **numărul**, ceea ce deja sugerează că răspunsul este unic. Iar apoi, manipulările pentru a ajunge la acest răspuns sunt atât de triviale, că nu le-aș vedea cerute nici la un extemporal de clasă. Nu înțeleg deloc rezultatele obținute în concurs ...

¹Albert Camus – Le mythe de Sisyphe.

²Consultați site-ul <http://www.scoala5calarasi.ro/barbilian.php> pentru rezultate. Enunțurile și soluțiile oficiale nu au fost încă încărcate nicăieri, nici pe site-ul SSMR.

Subiectul (2). Numim **cuvânt** o succesiune de litere $l_1 l_2 \dots l_n$, $n \geq 1$. Un cuvânt se numește **palindrom** dacă $l_k = l_{n-k+1}$, pentru oricare $1 \leq k \leq n$. Se consideră un cuvânt $X = l_1 l_2 \dots l_{2014}$, în care $l_k \in \{A, B\}$, pentru oricare $1 \leq k \leq 2014$. Demonstrați că sunt suficiente 806 cuvinte palindrom pe care să le "lipim" astfel încât să obținem cuvântul X .

CRISTIAN LAZĂR

Soluție. Întreg misterul problemei se lămurește dacă facem simpla observație că $806 = \frac{2}{5} \cdot 2010 + \frac{2}{4} \cdot 4$. Dacă arătăm că orice cuvânt de lungime 4 sau 5 se poate obține prin "lipirea" a cel mult 2 cuvinte palindrom, rezultatul decurge, segmentând cuvântul X în 402 cuvinte de lungime 5 și unul de lungime 4. În cele ce urmează putem presupune prima literă a fi A .

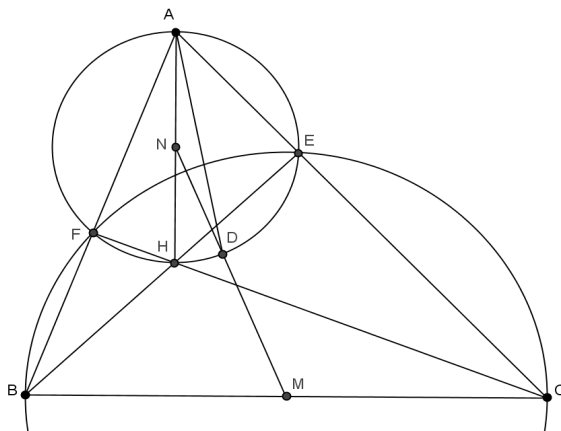
Avem $AAAA = (AAAA)$, $AAAB = (AAA)(B)$, $AABA = (A)(ABA)$, $AABB = (AA)(BB)$, $ABAA = (ABA)(A)$, $ABAB = (A)(BAB)$, $ABBA = (ABBA)$, $ABBB = (A)(BBB)$.

Singurele cuvinte de lungime 5 de interes rămân $AABAA = (AABAA)$, $ABBBB = (A)(BBBB)$, $ABBBA = (ABBBA)$, $ABBAB = (ABBA)(B)$, $ABBAA = (ABBA)(A)$, $ABABB = (ABA)(BB)$, $ABABA = (ABABA)$, $ABAAB = (A)(BAAB)$, $ABAAA = (ABA)(AA)$. \square

Remarcă. Rămâne de văzut dacă acest număr 806 nu poate fi diminuat. Există doar două cuvinte de lungime 6 care încep cu litera A și pentru care trebuie să "lipim" 3 cuvinte palindrom, anume $AABBAB$ și $AABABB$, dar s-ar putea face o analiză mai detaliată pentru a vedea efectul existenței a multe astfel de subcuvinte în X ... La prima vedere, numărul 806 pare a putea fi diminuat, dar analiza va fi cel puțin plicticoasă.

Subiectul (3). Se consideră triunghiul ABC , $m(\widehat{A}) < 90^\circ$, $AB \neq AC$. Se notează cu H ortocentrul triunghiului ABC , cu N mijlocul segmentului $[AH]$, cu M mijlocul segmentului $[BC]$ și cu D punctul de intersecție a bisectoarei unghiului \widehat{BAC} cu segmentul $[MN]$. Demonstrați că $m(\widehat{ADH}) = 90^\circ$.

selectată de MIRCEA FIANU



Soluție. (Laurențiu Ploscaru) Fie E , respectiv F , picioarele înălțimilor din B , respectiv C . Observăm că M și N sunt centrele cercurilor în care sunt înscrise patrulaterelor $BCEF$, respectiv $AEHF$; prin urmare dreapta MN este mediatoarea segmentului $[EF]$. Dar atunci punctul D este intersecția dintre mediatoarea lui $[EF]$ și bisectoarea unghiului \widehat{EAF} , de unde reiese că $D \in \odot(AEF)$. Cum AH este diametru în acest cerc, rezultă că unghiul \widehat{ADH} este drept. \square

Remarcă. Notățiile sunt stranii; odată se vorbește de măsura unghiului \widehat{A} , iar altădată despre unghiul \widehat{BAC} , de parcă n-ar fi același unghi ... Iar semnele de "unghi" se pare că nu au fost "recunoscute" de imprimantă, și acest fapt n-a fost remarcat, așa încât foile de concurs arată ca dracu' ...

Subiectul (4). *Se consideră numerele reale a_1, a_2, \dots, a_{2n} ale căror sumă este egală cu 0. Arătați că, printre perechile (a_i, a_j) , $1 \leq i < j \leq 2n$, există cel puțin $2n - 1$ perechi cu proprietatea că $a_i + a_j \geq 0$.*

selectată de CRISTIAN MANGRA

Soluție. (Laurențiu Ploscaru) Este arhicunoscut faptul că cele $n(2n - 1)$ perechi formate cu elemente dintr-o mulțime cu $2n$ elemente pot fi grupate în $2n - 1$ familii cu câte n perechi fiecare, în fiecare din aceste familii reuniunea elementelor perechilor sale fiind formată din toate cele $2n$ elemente. Aceasta se poate reformula de exemplu prin existența unei agende de $2n - 1$ runde de câte n meciuri, în care $2n$ echipe se întâlnesc fiecare cu fiecare.³

Or, în cazul nostru, din moment ce suma elementelor perechilor din fiecare familie este suma tuturor celor $2n$ numere, deci 0, înseamnă că măcar una dintre perechi are suma elementelor cel puțin egală cu 0. \square

Remarcă. Nu pot fi garantate mai mult de $2n - 1$ astfel de perechi; dacă doar $a_1 > 0$, avem exact $2n - 1$ astfel de perechi, anume (a_1, a_k) , $2 \leq k \leq 2n$. La fel se demonstrează că există cel puțin $2n - 1$ perechi cu suma elementelor cel mult egală cu 0. Să observăm și că rezultatul nu mai rămâne neapărat adevărat pentru un număr impar $N = 2n + 1$ de numere; de exemplu pentru $N = 3$, cu numerele 5, 5, -10 putem forma doar o singură pereche cu suma ne-negativă, și nu $N - 1 = 2$. Rezultă însă imediat că vor exista cel puțin $N - 2$ astfel de perechi. Deși problema este atractivă, esența ei este "re-vopsirea" unui rezultat clasic.

³Pentru conformitate, prezentarea algebrică a celor $2n - 1$ runde este după cum urmează. Runda k , $1 \leq k \leq 2n - 1$, este formată din perechile $\{i, j\}$ cu $i + j \equiv k \pmod{2n - 1}$, $1 \leq i \neq j \leq 2n - 1$, mai puțin pentru acel $1 \leq r \leq 2n - 1$ cu $r \equiv nk \pmod{2n - 1}$ (când am avea $r + r \equiv k \pmod{2n - 1}$), pentru care se formează perechea $\{r, 2n\}$.

Mult mai estetic plăcută ochiului este geometrizarea soluției. Asociem primelor $2n - 1$ elemente vârfurile unui poligon regulat cu $2n - 1$ laturi. Etichetăm și laturile cu numerele $1, 2, \dots, 2n - 1$. Atunci runda k , $1 \leq k \leq 2n - 1$, va fi formată din perechile (de vârfuri) care sunt capetele laturii etichetate k și ale diagonalelor paralele cu ea; rămâne ne-împerechiat vârful opus, pe care îl punem în pereche cu elementul $2n$.

Văd că s-a revenit la prostul obicei de a menționa autorii problemelor pe foile de concurs (desigur, toate creditele cuvenite trebuie date în cadrul prezentării soluțiilor). Rezultatele Testului Juniori nu sunt concludente, deși au participat 19 concurenți, dintre care 16 din România. Problemele au fost relativ ușoare – poate nici măcar de dificultatea unui obișnuit test de selecție jBMO. Cu toate acestea, mai ales subiectul 4 a creat unele probleme participanților, după cum se vede mai jos. Scorul cel mai mare a fost 25/28.

Subiect/Puncte	7 – 6	5 – 4	3 – 2	1 – 0
1	6	3	3	7
2	7	1	1	10
3	7	3	1	8
4	4	0	3	12

2. TESTUL CUPA DUNĂRII – SENIORI

Subiectul (1). Două cercuri secante C_1, C_2 au punctele comune A și A' . Tangenta în A la C_1 taie C_2 în B , tangenta în A la C_2 taie C_1 în C , iar dreapta BC taie din nou C_1 și C_2 în D_1 , respectiv D_2 . Se consideră punctele $E_1 \in (AD_1)$ și $E_2 \in (AD_2)$, astfel încât $AE_1 = AE_2$. Dreptele BE_1 și AC se intersectează în punctul M , dreptele CE_2 și AB se intersectează în punctul N , iar dreptele MN și BC se intersectează în punctul P . Arătați că PA este tangentă la cercul circumscris triunghiului ABC .

Soluție. Rareori am văzut un enunț mai aglomerat! Oricum nu am eu tragere de inimă în a analiza problemele de geometrie, dar de asta fug ca dracul de agheasmă. \square

Subiectul (2). Fie S o mulțime de numere naturale nenule, astfel încât $[\sqrt{x}] = [\sqrt{y}]$, oricare ar fi elementele x și y ale lui S . Arătați că produsele xy , unde $x, y \in S$, sunt distincte două câte două.

Soluție. Fie $m \geq 1$ valoarea comună. Atunci $S \subseteq \{m^2, m^2 + 1, \dots, m^2 + 2m\}$. Fie $x = m^2 + i, y = m^2 + j, z = m^2 + k, t = m^2 + \ell$, cu $i, j, k, \ell \in \{0, 1, \dots, 2m\}$, $\{i, j\} \cap \{k, \ell\} = \emptyset, xy = zt$. Atunci trebuie $m^2((i + j) - (k + \ell)) = k\ell - ij$. Fără a restrânge generalitatea putem presupune $k\ell > ij$ (evident nu putem avea $(i + j) - (k + \ell) = 0 = k\ell - ij$, căci atunci $\{i, j\} = \{k, \ell\}$). Avem atunci $m^2 \leq k\ell - ij \leq 4m^2$, deci $1 \leq (i + j) - (k + \ell) \leq 4$, și există $\lambda \in \{1, 2, 3, 4\}$ astfel încât $k\ell = \lambda m^2 + ij$ și $k + \ell = (i + j) - \lambda$. Discriminantul ecuației de gradul 2 de rădăcini k și ℓ va fi $\Delta = (i + j)^2 - 2\lambda(i + j) + \lambda^2 - 4\lambda m^2 - 4ij$, adică $\Delta = ((i - j)^2 - 4\lambda m^2) - \lambda(2(i + j) - \lambda)$.

Din $k\ell \geq m^2 + ij \geq m^2$ rezultă $k + \ell \geq 2\sqrt{k\ell} \geq 2m$. Atunci $i + j \geq k + \ell + 1 \geq 2m + 1$ duce la $\min\{i, j\} > 0$, și atunci $(i - j)^2 < 4m^2 \leq 4\lambda m^2$. Finalmente $\Delta < -\lambda(2(i + j) - \lambda) \leq -\lambda(2(2m + 1) - \lambda) \leq -\lambda(6 - \lambda) < 0$, ceea ce neagă realitatea rădăcinilor k, ℓ . Prin urmare $xy \neq zt$, deci produsele xy , unde $x, y \in S$, sunt distincte două câte două. \square

Subiectul (3). Arătați că, oricare ar fi numărul întreg $n \geq 2$, există o mulțime de n numere întregi compuse, coprime două câte două, care formează o progresie aritmetică.

Soluție. Deja Wacław Sierpiński cerea, în Problema 52 din cele 250 "Probleme Elementare" ale sale, găsirea unei progresii aritmetice oricât de lungi, cu termenii doi câte doi coprimi. Soluția prezentată acolo era de a lua progresia $\{1 + k \cdot n! \mid 1 \leq k \leq n\}$. Nu ne rămâne decât să adăugăm o mică variație și sofisticare. Fie $2 = p_1 < p_2 < \dots < p_m \leq n < p_{m+1} < \dots < p_{m+n}$ încadrarea lui n între termenii șirului numerelor prime. Considerăm sistemul de congruențe $x \equiv 1 \pmod{p_1 p_2 \dots p_m}$ și $x \equiv -k \cdot n! \pmod{p_{m+k}^2}$ pentru $1 \leq k \leq n$. Din Lema Chineză a Resturilor, sistemul admite un întreg pozitiv a drept soluție, și vom considera progresia $\{a + k \cdot n! \mid 1 \leq k \leq n\}$.

Acum, $p_{m+k}^2 \mid a + k \cdot n!$, deci termenii ei sunt numere compuse, iar pentru $1 \leq i \neq j \leq n$, dacă ar exista un astfel de număr prim p pentru care $p \mid \text{c. m. m. d. c.}(a + i \cdot n!, a + j \cdot n!)$, atunci $p \mid |(a + i \cdot n!) - (a + j \cdot n!)| = |i - j|n!$. Dar $1 \leq |i - j| < n$, deci am avea $p \leq n$, așadar $p = p_\ell$ pentru un $1 \leq \ell \leq m$, iar atunci $p_\ell \mid i \cdot n!$ și deci $p_\ell \mid (a + i \cdot n!) - i \cdot n! = a$, absurd. Prin urmare termenii progresiei sunt doi câte doi coprimi. \square

Remarcă. Metoda este o aplicație clasică a Lemei Chineze. Desigur, o astfel de progresie **infinită** $\{a + kr \mid k \geq 1\}$ (cu $r \neq 0$) nu poate exista nici măcar sub condiția mai restrânsă a lui Sierpiński, deoarece pentru un număr prim q care divide $a + r$ am avea și $q \mid a + (q + 1)r$.

Subiectul (4). Fie n un număr natural nenul și fie Δ triunghiul cu vârfurile în punctele laticiale $(0, 0)$, $(n, 0)$ și $(0, n)$. Determinați cardinalul maxim al unei mulțimi S de puncte laticiale situate în interiorul sau pe bordul lui Δ , astfel încât segmentul determinat de oricare două puncte distincte din S să nu fie paralel cu niciuna dintre laturile lui Δ .

Soluție. Fiecărui punct laticial (x, y) din interiorul sau de pe bordul lui Δ îi asociem tripletul $(x, y, n - x - y)$, având $0 \leq x, y$ și $x + y \leq n$ (coordonate triliniare). O astfel de mulțime $S = \{(a_i, b_i, c_i) \mid 1 \leq i \leq N\}$ are deci proprietățile

- $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{N}$, pentru orice $1 \leq i \leq N$;
- $a_i + b_i + c_i = n$, pentru orice $1 \leq i \leq N$;
- $a_i \neq a_j, b_i \neq b_j, c_i \neq c_j$, pentru orice $1 \leq i \neq j \leq N$.

Ni se cere să determinăm valoarea $N_3(n) = \max N$. O interpretare combinatorică alternativă poate fi și după cum urmează – trebuie determinat numărul maxim de "nebuni" (ca la șah), care nu se amenință unul pe celălalt, situați în noduri ale rețelei obținute prin partiționarea triunghiului Δ în n^2 mici triunghiuri (dreptunghice de catetă 1) prin paralele la laturile lui Δ .

Răspunsul este $N_3(n) = \lfloor 2n/3 \rfloor + 1$, după cum urmează.

Avem $\sum_{i=1}^N (a_i + b_i + c_i) = Nn$ pe de o parte, și

$$\sum_{i=1}^N (a_i + b_i + c_i) = \sum_{i=1}^N a_i + \sum_{i=1}^N b_i + \sum_{i=1}^N c_i \geq 3(0 + \dots + (N-1)) = \frac{3N(N-1)}{2}$$

pe de altă parte, căci fiecare valoare poate apare cel mult câte odată pentru fiecare dintre coordonate. Rezultă deci că $n \geq \frac{3(N-1)}{2}$, adică $N \leq \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor + 1$.

Modele maximale posibile sunt după cum urmează

- pentru $n = 3m$, putem lua tripletele $(0, m, 2m)$, $(1, m+1, 2m-2)$, \dots , $(m, 2m, 0)$, $(m+1, 0, 2m-1)$, $(m+2, 1, 2m-3)$, \dots , $(2m, m-1, 1)$.
- pentru $n = 3m+1$, putem lua tripletele $(1, m, 2m)$, $(2, m+1, 2m-2)$, \dots , $(m+1, 2m, 0)$, $(m+2, 0, 2m-1)$, $(m+3, 1, 2m-3)$, \dots , $(2m+1, m-1, 1)$.
- pentru $n = 3m-1$, putem în fine lua tripletele $(0, m+1, 2m-2)$, \dots , $(m-1, 2m, 0)$, $(m, 0, 2m-1)$, $(m+1, 1, 2m-3)$, \dots , $(2m-1, m-1, 1)$.

Cu aceasta, demonstrația este completă. \square

Remarcă. S-a mai întâmplat și în trecut cu una dintre problemele mele.⁴ Aceasta, după o idee și un caz particular al lui Vasile Pop, generalizată chiar la k -upluri (în loc de triplete), a fost propusă pentru Olimpiada Internațională din 2009, ajungând pe Lista Scurtă, în exact această versiune cu $k = 3$ (cazul extrem $k = n$ este și el o versiune simplă, plăcută ochiului, pentru care $N_n(n) = 3$, iar $N_2(n) = n + 1$ este trivial, la fel ca și $N_{2n}(n) = 2$). Vezi

<http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=1932924>

De altfel, problema a fost întrebata – în toată generalitatea ei – ca Problema 4 la concursul "Școala cu Ceas" de la Râmnicu Vâlcea 2010; vezi de exemplu **RMC 2010**, paginile 39 și 150-151.

Dacă cei ce au selecționat problema pentru acest concurs de la Călărași erau la curent cu toate acestea, rămâne totuși o decizie chestionabilă. Dacă nu, și nu au știut să vadă sub formularea de față (puțin diferită) izomorfismul cu problema din trecut, este încă mai grav.

Au participat 31 de concurenți, dintre care 26 din România. Problemele au fost relativ ușoare – poate nu chiar de dificultatea unui obișnuit test de selecție IMO. Cu toate acestea, mai ales subiectul 4 a creat enorme probleme participanților, după cum se vede mai jos (vezi și comentariul extins de la această problemă; să fi fost și sindromul "Problema 4"?). Scorul cel mai mare a fost 22/28. În mod necaracteristic, primele două locuri *ex-quo* au fost ocupate de doi elevi din Chișinău! (desigur, cei mai buni dintre elevii români au lipsit, dar totuși ...); după corectură li s-a adăugat și un român.

⁴Tot la Călărași, în 2010, a fost reutilizată ca Problema 1 cerința de a determina acele numere întregi $n \geq 3$ pentru care poligonul regulat cu n laturi poate fi descompus în triunghiuri isoscele, prin diagonale care nu se traversează; vezi de exemplu **RMC 2011**, paginile 63-64. Problema a fost inițial întrebata la un concurs IMAR de prin 2005/2007.

Subiect/Puncte	7 – 6	5 – 4	3 – 2	1 – 0
1	20	0	5	6
2	17	4	5	5
3	12	1	1	17
4	0	0	1	30

3. ÎNCHEIERE

Lipsesc soluțiile oficiale (și nici măcar enunțurile nu sunt postate); un concurs nu devine educativ decât atunci când concurenții, după ce au avut poate dificultăți cu unele probleme, pot învăța multe din soluțiile oficiale, care trebuie să fie un model de claritate, cu metode alternative și trimiteri la alte rezultate teoretice ... Rezultatele au apărut noaptea târziu, la

<http://www.scoala5calarasi.ro/barbilian.php>,

dar nu și pe site-ul SSMR (spre deosebire de anul trecut; bunele obiceiuri dispar la fel de repede cum au și apărut, ca ciupercile înainte și după ploaie). Mai mult, a doua zi a apărut o versiune "corectată", cu câteva schimbări spectaculoase de note ☺.

Este de o înduioșătoare ironie faptul că aceste materiale ale mele nu sunt citite tocmai de către cei care le-au stârnit. De acolo și aluzia livrescă din *motto*; nu-mi rămâne decât satisfacția lucrului bine-făcut, oricât de repetitiv și lipsit de urmări. *Dixi, et salvavi animam meam.*