PREZENTARE CONCURSUL CĂLĂRAŞI 2013

Abstract. Presentation with solutions for the problems given at the Juniors and Seniors Tests, and some selected other problems from the Călăraşi Competition, 2013.

Data: 4 noiembrie 2013.
Autor: Dan Schwarz, Bucureşti.

My joy is my sorrow unmasked.[1]

1. Introducere

Această prezentare, însoţită de comentarii şi de soluţii ale autorului, asupra Testelor Juniori şi Seniori, precum şi a unor probleme spicuite de la concursurile pe clasă (gimnaziu) de la concursul Călăraşi, ediţia a XVIII-a 2013, este, după cum ne-am obişnuit, opinia personală a autorului.[2]

Voi indica prin culoarea roşie eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea verde varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea albastră pentru comentariile personale.

2. Testul Cupa Dunării – Juniori

Subiectul (1). *Determinaţi numerele naturale $n \geq 2$ pentru care există $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^*$ astfel încât*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = 0.$$

Soluţie. Pentru $n = 2$ este echivalent cu a lua $x_2 = -x_1 \neq 0$. Pentru $n = 3$ ar trebui să avem $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ şi $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} = \dfrac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3} = 0$, deci $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0$. Dar atunci

$$0 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

ceea ce se poate numai pentru $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, absurd. Pentru $n > 3$, luând $x_1 = \cdots = x_{n-2} = x \neq 0$, $x_{n-1} = a$, $x_n = b$, căutăm $a + b = -(n-2)x$ şi $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = -\dfrac{n-2}{x}$, adică a, b rădăcini ale ecuaţiei $\lambda^2 + (n-2)x\lambda + x^2$, de discriminant $\Delta = x^2((n-2)^2 - 4) \geq 0$ pentru $n > 3$. Prin urmare toate numerele naturale $\boxed{n \geq 2, \text{ mai puţin } n = 3}$, au proprietatea cerută. □

---

[1]Khalil Gibran – The Prophet. Bucuria de a discuta matematică mi se trage din tristeţea provocată de felul în care a fost maltratată ...

[2]Consultaţi problemele şi soluţiile oficiale ale Testului Seniori, precum şi enunţurile complete la probele pe clasă (gimnaziu numai); de asemenea, rezultate (parţiale), la `http://ssmr.ro/activitati/concursuri/Ion_Barbu_2013`.

Subiectul (2)**.** *Se consideră 64 numere naturale distincte, cel mult egale cu 2012. Arătaţi că se pot alege patru numere dintre acestea, notate a, b, c, d, astfel încât $a + b - c - d$ să fie multiplu de 2013.*

Soluţie. Principiul cutiei. Există $\binom{64}{2} = 2016 > 2013$ sume de câte două numere distincte dintre cele 64, deci două dintre ele vor da acelaşi rest la împărţirea prin 2013. Dar cele două perechi sunt disjuncte, căci dacă ar avea un element în comun, diferenţa celorlalte două, fiind cel mult 2012 în valoare absolută, nu poate fi divizibilă prin 2013. □

Remarcă. Nu înseamnă că există o mulţime de 63 numere naturale, cel mult egale cu 2012, pentru care afirmaţia problemei este falsă. De exemplu, pentru 40 în loc de 2013, metoda din soluţie arată că dintre 10 numere naturale distincte, cel mult egale cu 39, putem alege $a+b \equiv c+d \pmod{40}$, căci $\binom{10}{2} = 45 > 40$. Dar deşi $\binom{9}{2} = 36 < 40$, acelaşi lucru se întâmplă pentru 9 numere; doar cu 8 numere putem evita concluzia, de exemplu $\{0, 1, 5, 7, 9, 20, 23, 25\}$. Vezi [R. K. Guy – *Unsolved Problems in Number Theory*], **C9 – C10**.

Subiectul (3)**.** *Determinaţi numerele naturale m, n astfel încât $85^m - n^4 = 4$.*

Soluţie. Factorizarea Sophie Germain ne dă $85^m = n^4 + 4 = (n^4 + 4n^2 + 4) - 4n^2 = (n^2+2)^2 - (2n)^2 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$. Deoarece trebuie să avem n impar, rezultă $\mathrm{cmmdc}(n^2 - 2n + 2, n^2 + 2n + 2) = 1$, deci $n^2 - 2n + 2 = 1$, $n^2 + 2n + 2 = 85^m$, sau $n^2 - 2n + 2 = 5^m$, $n^2 + 2n + 2 = 17^m$.

Primul caz este imposibil, căci cere $n = 1$, care nu verifică. Al doilea caz duce la $(n-1)^2 = 5^m - 1 < 17^m - 1 = (n+1)^2$, dar pentru $m > 1$ avem $5^m - 1 < (3^m)^2 < (4^m)^2 < 17^m - 1$, deci trebuie $\boxed{m = 1,\ n = 3}$, care verifică $85 - 3^4 = 4$ (evident $m = 0$ nu verifică). □

Subiectul (4)**.** *Se consideră dreptunghiul $ABCD$, cu $AB \neq BC$, şi cu centrul în punctul O. Perpendiculara în O pe dreapta BD intersectează dreptele AB şi BC în punctele E, respectiv F. Punctele M şi N sunt mijloacele segmentelor $[CD]$, respectiv $[AD]$. Demonstraţi că $FM \perp EN$.*

Soluţie. Soluţia este complet elementară, din multele simetrii şi paralelisme din figură. Un ortocentru apare în mod natural. De fapt a fost problema cea mai uşoară din concurs; cel puţin – cu cel mai mare punctaj acumulat. □

Rezultatele Testului Juniori nu sunt concludente, deşi au participat 24 de concurenţi, dintre care 17 din România. În plus, problemele au fost extrem de uşoare – poate la jumătatea dificultăţii unui obişnuit test de selecţie jBMO. Cu toate acestea, mai ales subiectele 1 şi 3 au creat mari probleme participanţilor, după cum se vede mai jos. Scorul cel mai mare a fost 18/28.

Subiect/Puncte	7 – 6	5 – 4	3 – 2	1 – 0
1			18	6
2	6		3	15
3	1	2	2	19
4	6		3	15

3. Testul Cupa Dunării – Seniori

Subiectul (1)**.** *Dacă* U, V, W, X, Y, Z *sunt şase puncte situate pe un cerc, punctele de intersecţie a perechilor de drepte*

$$(UV, XY),\ (VW, YZ),\ (WX, ZU)$$

se află pe o dreaptă, numită dreapta Pascal a hexagramei (U, V, W, X, Y, Z)*. Să se arate că, dacă* A, a, B, b, C, c *sunt şase puncte situate pe un cerc, atunci dreptele Pascal ale hexagramelor*

$$(A, a, B, b, C, c),\ (A, b, B, c, C, a),\ (A, c, B, a, C, b)$$

sunt concurente.

Soluţie. Mi se atrage atenţia că este chiar teorema lui Steiner, în strânsă legătură cu teorema lui Kirkman. □

Subiectul (3)**.** *Să se arate că, oricare ar fi numărul întreg* $r \geq 2$*, există un graf* r*-cromatic care nu are cicluri de lungime strict mai mică decât* 6*.*

(Un graf se numeşte r*-cromatic, dacă* r *este numărul minim de culori necesare colorării vârfurilor, astfel încât oricare două vârfuri adiacente să aibă culori diferite.)*

Soluţie. Este o celebră şi fundamentală teoremă a lui Erdös,[3] care afirmă că există grafuri G de talie (*girth*) $g(G)$ oricât de mare şi număr cromatic $\chi(G)$ oricât de mare. Numărul 6 din enunţ nu joacă evident niciun rol nici în soluţia oficială, care este constructivă, şi nu probabilistică. □

Subiectul (4)**.** *Să se arate că există o submulţime proprie nevidă* S *a mulţimii numerelor reale, astfel încât, oricare ar fi numărul real* x*, familia de mulţimi*

$$S,\ x + S,\ 2x + S,\ \ldots,\ nx + S,\ \ldots$$

este finită, unde $kx + S = \{kx + s \mid s \in S\}$*,* $k \in \mathbb{N}$*.*

Soluţie. Soluţia stă în efectiv un rând; luând $\mathcal{H}$ o bază Hamel a lui $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$, luăm $S = \bigoplus_{h \in \mathcal{H}} h\mathbb{Z}$ a fi suma directă a $\mathbb{Z}$-modulelor generate de elementele bazei $\mathcal{H}$ în $\mathbb{R}$, adică acele numere reale care se reprezintă în baza $\mathcal{H}$ cu coeficienţi întregi. □

Mai bine chiar că nu se putea. Penuria a ajuns atât de departe încât se recurge la teoreme clasice, şi la construcţii algebrice dincolo de interesul olimpiadelor şcolare de matematică, fie ele de nivel şi tip internaţional. Mă gândesc să propun teorema Kobayashi cu proxima ocazie ...

[3]⟨⟨In a pioneering paper of 1959, founding the now called *probabilistic method* in graph theory⟩⟩ [R. Diestel – *Graph Theory*], Chapter 11.

4. Clasa a V-a

Subiectul (1)**.**

c) Este posibil să se împartă 5 *mere de aceeaşi dimensiune, în mod egal, între* 6 *copii, astfel încât cel puţin un măr nu va fi tăiat în mai mult de* 3 *bucăţi? (Vi se permite să tăiaţi un măr în orice număr de bucăţi egale). Justificaţi răspunsul!* . . . . **3** *puncte*

Soluţie. Pe lângă ambiguitatea dintre permisiunea din paranteză şi restricţia impusă, cerinţa este prea **slabă**; putem face împărţirea astfel ca **niciun** măr să nu fie tăiat în mai mult de trei bucăţi, şi aceasta într-un mod banal, împărţind trei mere – fiecare în jumătăţi, şi celelalte două mere – fiecare în treimi. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ este *misterioasa* ecuaţie (de şase ori) ... □

Subiectul (3)**.**

b) Pentru recompensarea elevilor care au obţinut rezultate bune la concursuri, o şcoală a cumpărat 60 *de dicţionare de următoarele tipuri: Dicţionar explicativ al limbii române (preţ* 80 *RON), Dicţionar englez – român / român – englez (preţ* 31 *RON) şi Dicţionar spaniol – român / român – spaniol (preţ* 30 *RON). Pentru cumpărarea dicţionarelor s-au cheltuit* 2013 *RON. Câte dicţionare s-au cumpărat din fiecare tip? Justificaţi răspunsul!* . . . . **5** *puncte*

Soluţie. $DEX + E/R + S/R = 60$ şi $80DEX + 31E/R + 30S/R = 2013$. Atunci $50DEX + E/R = 2013 - 30 \cdot 60 = 213$, ceea ce în mod evident forţează $E/R \in \{13, 63, \ldots\}$; dar cum avem $E/R \leq 60$, nu ne rămâne decât posibilitatea $E/R = 13$, de unde $DEX = 4$ şi $E/S = 43$. □

Subiectul (4)**.** *Textul, mult prea complicat, întreabă dacă fiind date* 25 *de obiecte galbene şi* 25 *de obiecte albastre, prin* ***paşi*** *prin care putem schimba culoarea elementelor oricărei perechi de obiecte, putem aduce toate obiectele de o aceeaşi culoare?*

Soluţie. Răspunsul este NU. Metoda invarianţilor. Notăm, la pasul p, cu $G(p)$ numărul obiectelor galbene, deci $G(0) = 25$.

Atunci după un pas $(g, g) \mapsto (a, a)$ avem $G(p + 1) = G(p) - 2$, după un pas $(g, a) \mapsto (a, g)$ avem $G(p + 1) = G(p)$, iar după un pas $(a, a) \mapsto (g, g)$ avem $G(p + 1) = G(p) + 2$. Prin urmare paritatea lui $G(p)$ se păstrează, deci nu vom putea avea niciodată $G(p) = 0$, nici $G(p) = 50$. □

5. Clasa a VI-a

Subiectul (1)**.**

b) Completează cu numărul potrivit celula liberă din **Linia 1***, astfel încât numerele scrise în această linie să respecte regula după care sunt completate celelalte trei linii.* . . . . **3** *puncte*

Linia 1	*5*	*8*	**?**	*6*
Linia 2	*16*	*20*	*14*	*12*
Linia 3	*34*	*25*	*18*	*16*
Linia 4	*20*	*28*	*45*	*31*

Soluţie. Nu există soluţie! Sau, dacă vreţi, probabil că soluţia intenţionată este să "observăm" că suma numerelor din **Linia k** este $31k$, cu $2 \leq k \leq 4$; atunci elementul lipsă din **Linia 1** va fi $31 - (5 + 8 + 6) = \boxed{12}$. Dar din nefericire, există infinit de multe "reguli" imaginabile – alegerea celei de mai sus este o aplicare a "briciului lui Occam" (dintre mai multe posibilităţi, să mergem cu cea mai "simplă"). În fine, liniile au mai mult o *proprietate*, decât o *regulă* după care să fi fost formate. Acest tip de întrebare este mai potrivit pentru almanahuri, sau rubrici de matematici recreative, decât un concurs şcolar; deprinderile nepotrivite trebuie evitate, mai ales venind din partea unei "autorităţi" educative. □

Subiectul (3)**.** *O mulţime finită nevidă $A \subset \mathbb{N}^*$ se numeşte zice* ***pătratică*** *dacă suma elementelor sale este egală cu pătratul numărului său de elemente (de exemplu mulţimea $A = \{1, 2, 6\}$ este pătratică, deoarece $1 + 2 + 6 = 3^2$).*

b) Demonstraţi că pentru orice număr natural nenul n există o mulţime pătratică cu n elemente. . . . . **2** *puncte*

c) Arătaţi că două mulţimi pătratice care au acelaşi număr de elemente, au cel puţin un element comun. . . . . **3** *puncte*

Soluţie.

b) Punctul a), pe care l-am omis, oferea o indicaţie completă pentru a considera mulţimea $A_n = \{1, 3, \ldots, 2n - 1\}$ pătratică – fapt bazat pe bine-cunoscuta identitate $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k - 1) = n^2$ (demonstrabilă prin simplă inducţie).

c) Fie $A, B \subset \mathbb{N}^*$ pătratice, cu $|A| = |B| = n$. Dacă am avea $A \cap B = \emptyset$, înseamnă că $\displaystyle 2n^2 = \sum_{x \in A} x + \sum_{x \in B} x = \sum_{x \in A \cup B} x \geq \sum_{k=1}^{2n} k = n(2n + 1) > 2n^2$, contradicţie. □

Subiectul (4)**.** *Pe circumferinţa unui cerc se consideră 7 puncte, fiecare din ele colorat cu roşu sau cu negru. Prin* ***transformare*** *înţelegem schimbarea culorilor a trei puncte consecutive (din roşu în negru şi din negru în roşu).*

a) Să se arate că printr-o succesiune de transformări putem obţine orice colorare dorim. . . . . **5** *puncte*

b) Dacă pe circumferinţa cercului se consideră 6 puncte, există oare o succesiune de transformări prin care putem obţine orice colorare dorim? pentru orice colorare dorită, o succesiune de transformări prin care să fie obţinută? (Justificaţi răspunsul) . . . . **2** *puncte*

Soluţie.

a) Fie a, b, c, d, e, f, g o etichetare a celor 7 puncte. Aplicând succesiunea de transformări $S(a)$ dată de $(a, b, c), (c, d, e), (d, e, f), (f, g, a), (g, a, b)$ vom obţine schimbarea culorii doar pentru punctul a. Prin urmare putem obţine orice colorare dorim, aplicând $S(x)$ pentru fiecare punct x a cărui culoare o dorim schimbată.

b) Fie $0, 1, 2, 3, 4, 5$ o etichetare a celor 6 puncte. Notăm cu $r_k \in \{0, 1\}$ paritatea numărului punctelor roşii r cu $r \equiv k \pmod 3$, pentru $0 \le k \le 2$. Se observă că orice transformare schimbă paritatea numerelor (r_0, r_1, r_2). Prin urmare, dintr-un triplet iniţial (r_0, r_1, r_2) se pot obţine prin transformări succesive doar el însuşi sau dualul său $(1 - r_0, 1 - r_1, 1 - r_2)$; în orice caz nu şi $(1 - r_0, r_1, r_2)$, deci nu orice colorare poate fi obţinută. De fapt (vezi remarca ce urmează) putem preciza exact câte colorări se pot astfel obţine. $\square$

Remarcă. Rezultatul cel mai general este că, pentru orice graf G finit unde vârfurile sunt colorate folosind două culori, din orice colorare poate fi obţinută colorarea duală prin transformări care schimbă culoarea unui vârf şi a acelor vârfuri adiacente cu el. Dar nu orice colorare poate fi în general obţinută; din numărul total posibil de $2^{|G|}$ colorări se pot întotdeauna obţine un număr de 2^{k_G}, pentru un $1 \le k_G \le |G|$ care depinde de structura grafului. De exemplu pentru graful complet K_n avem $k_{K_n} = 1$, iar pentru graful său dual $0_n = \overline{K_n}$ avem $k_{0_n} = n$. În cazul nostru, graful este un ciclu C_n, şi exact caracterizarea completă a a acestui caz a fost cerută în Problema 3, primul Test de Selecţie IMO/BMO, 2009.[4]

Răspunsul este $k_{C_n} = n - 2$ pentru $3 \mid n$ şi $k_{C_n} = n$ pentru $3 \nmid n$, deci pentru $n = 7$ se poate obţine orice colorare dorită din cele 2^7 posibile, dar pentru $n = 6$ se pot obţine doar 2^4 din cele 2^6 colorări posibile. Se pot similar calcula parametrii unui drum P_n. În general, dacă A este matricea de adiacenţă a grafului G, se obţine $k_G = \operatorname{rang}(A + I_{|G|})$.

6. Clasa a VII-a

Subiectul (1)**.**

a) Găsiţi numerele naturale $n \ge 2$ cu proprietatea

$$\frac{1}{n} < 0,1025 < \frac{1}{n-1}.$$ ....**3** *puncte*

b) Dacă $\dfrac{1}{x+2012} + \dfrac{1}{y+2012} + \dfrac{1}{z+2012} = \dfrac{3}{2013}$, *arătaţi că*

$$\frac{x}{x+2012} + \frac{y}{y+2012} + \frac{z}{z+2012} = \frac{3}{2013}.$$ ....**2** *puncte*

c) Găsiţi toate numerele de trei cifre care nu conţin cifra zero şi având suma inverselor cifrelor numărului este egală cu 1. ....**2** *puncte*

[4] **RMC 2009** conţine soluţii alternative detaliate, ca şi comentarii amănunţite asupra unei probleme înrudite, anume Problema 4, jBMO 2008.

Soluţie.

a) Efectul *benignei* erori de limbă "Găsiţi numere ..." putea fi că un concurent va răspunde $n = 10$, imediat verificabil. Desigur, se cereau **toate** numere**le**, ceea ce nu este mai dificil; scriind $n > \dfrac{1}{0,1025} = 10 - \dfrac{10}{41} > n - 1$, nu e chiar o coincidenţă că $\boxed{n = 10}$ este chiar singura posibilitate.

b) Din $\sum \dfrac{x}{x+2012} = 3 - 2012 \sum \dfrac{1}{x+2012} = 3\left(1 - \dfrac{2012}{2013}\right) = \dfrac{3}{2013}$.

c) Pentru $\overline{abc}$ dorim $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 1$, o ecuaţie Diofantică mai veche decât timpul, cu soluţiile $(2,3,6)$, $(2,4,4)$, $(3,3,3)$ şi permutările lor, deci numerele sunt $\boxed{236, 263, 326, 362, 623, 632, 244, 424, 442, 333}$. $\square$

Remarcă. Am prezentat această problemă banală doar pentru neaşteptat de slabele punctaje obţinute, şi pentru a critica prostul obicei de a înghesui într-o aceeaşi problemă două-trei întrebări complet independente. *En gros ...*

Puncte	$7-6$	$5-4$	$3-2$	$1-0$
# Note (Sub. 1)	8	22	28	25

Subiectul (3)**.** *Pentru orice număr natural n se notează cu P_n produsul cifrelor sale.*

a) Arătaţi că pentru toate numerele naturale n care au 2013 cifre avem $P_n < 10^{2013}$. . . . . **2** *puncte*

b) Găsiţi toate numerele naturale n cu $P_n = \dfrac{25}{8}n - 211$. . . . . **5** *puncte*

Soluţie.

a) Avem $P_n \leq 9^{2013} < 10^{2013}$. Duh ... (probabil cârje pentru b)).

b) Fie $n = \overline{ad_1d_2 \ldots d_k}$, $k \in \mathbb{N}$. Atunci $n \geq 10^k a$, iar $P_n \leq 9^k a \leq 10^k a$, şi atunci $10^k a \geq P_n = \dfrac{25}{8}n - 211 \geq \dfrac{25}{8}10^k a - 211$, deci $10^k \leq \dfrac{8 \cdot 211}{17a} < 100$, adică $0 \leq k \leq 1$. Pe de altă parte, trebuie $8 \mid n$, deci $n = 8m$; acum având $0 \leq P_{8m} = 25m - 211$ forţează $m \geq \lceil 211/25 \rceil = 9$.

Singurele posibilităţi sunt deci $m = 9$, pentru care $\boxed{14 = P_{72} = \dfrac{25}{8} \cdot 72 - 211}$ şi $m = 11$, pentru care $\boxed{64 = P_{88} = \dfrac{25}{8} \cdot 88 - 211}$. $\square$

Subiectul (4)**.** *Pentru fiecare submulţime nevidă $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ a mulţimii $\{1, 2, \ldots, 10\}$, $k = 1, 2, \ldots, 10$, se consideră suma*

$$S(A) = a_1 - a_1a_2 + a_1a_2a_3 - \cdots - (-1)^k a_1a_2\cdots a_k,$$

unde $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$. Să se determine suma tuturor acestor sume.

Soluţie. Fie mulţimea univers $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$. Efectuând manual calculele pentru $n \in \{1, 2, 3, 4\}$, stabilim conjectura $\sum_{\emptyset \neq A \subseteq [n]} S(A) = 2^{n-1}$ (aici se vede avantajul de a "generaliza" enunţul – ceea ce ne permite în acelaşi timp şi "particularizări" din care să obţinem în mod empiric o ipoteză de lucru). Presupunem deci formula adevărată pentru n, şi considerăm cazul $n + 1$. Dacă $n + 1 \in A$, vom nota $A' = A \setminus \{n + 1\}$, deci $\emptyset \subseteq A' \subseteq [n]$. Pentru unificarea notaţiilor, definim şi $S(\emptyset) = 0$ (ceea ce nu afectează formulele), dar şi $\prod_{a \in \emptyset} a = 1$. Atunci avem

$$S(A) = S(A' \cup \{n+1\}) = S(A') - (-1)^{|A|} \prod_{a \in A} a = S(A') + (n+1)(-1)^{|A'|} \prod_{a \in A'} a,$$

deci

$$\sum_{n+1 \in A \subseteq [n+1]} S(A) = \sum_{\emptyset \subseteq A' \subseteq [n]} S(A') + (n+1) \sum_{\emptyset \subseteq A' \subseteq [n]} (-1)^{|A'|} \left(\prod_{a \in A'} a \right).$$

Dar $\sum_{\emptyset \subseteq A' \subseteq [n]} S(A') = 2^{n-1}$, conform cu ipoteza de inducţie, şi vom demonstra în plus că $\sum_{\emptyset \subseteq A' \subseteq [n]} (-1)^{|A'|} \left(\prod_{a \in A'} a \right) = 0$. Vom scrie

$$P(x) = \sum_{\emptyset \subseteq A' \subseteq [n]} (-1)^{|A'|} \left(\prod_{a \in A'} a \right) x^{n-|A'|} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left(\sum_{|A'|=k} \prod_{a \in A'} a \right) x^{n-k},$$

şi se vede că $P(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - k)$, deci $\sum_{\emptyset \subseteq A' \subseteq [n]} (-1)^{|A'|} \left(\prod_{a \in A'} a \right) = P(1) = 0$, după cum am promis. Finalmente, avem

$$\sum_{\emptyset \neq A \subseteq [n+1]} S(A) = \sum_{\emptyset \subsetneq A \subseteq [n]} S(A) + \sum_{n+1 \in A \subseteq [n+1]} S(A) = 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2^n.$$

Rezultă că pentru $n = 10$, valoarea căutată este $\boxed{2^{10-1} = 512}$. □

Soluţie Alternativă. (Alexandru Mihalcu) În notaţiile de mai sus, considerăm perechile $(A, A \cup \{1\})$, cu $\emptyset \subseteq A \subseteq [n] \setminus \{1\}$, care epuizează submulţimile lui $[n]$. Observăm că $S(A) + S(A \cup \{1\}) = 1$, şi atunci

$$\sum_{A \subseteq [n]} S(A) = \sum_{1 \notin A \subset [n]} (S(A) + S(A \cup \{1\})) = \sum_{1 \notin A \subset [n]} 1 = 2^{n-1},$$

cu aceeaşi concluzie ca mai sus. Bravo! Eram destul de sigur că îmi scapă mie un raţionament mai simplu, dar oricum problema este de cu totul altă anvergură decât cea aşteptată în acest context. □

Remarcă. Comparativ, subiectele clasei a VII-a sunt ceva mai dificile decât cele ale celorlalte clase, mai ales Problema 4, a cărei raţiune nu prea o înţeleg, în cadrul unui concurs interjudeţean. Rezultatele sunt cele de aşteptat, în aceste condiţii.

Puncte	$7-6$	$5-4$	$3-2$	$1-0$
# Note (Sub. 4)	2		1	80

7. Clasa a VIII-a

Subiectul (1).

a) Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $a \neq b$, $c \neq -a$, $c \neq -b$ şi $a^2 + b^2 = 2c^2$, arătaţi că $\dfrac{(a+b+2c)(2a^2-b^2-c^2)}{(a-b)(b+c)(c+a)} = 3$. .... **3** *puncte*

b) Dacă $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ astfel încât $a \geq b \geq c$, arătaţi că $\dfrac{a^3-c^3}{3} \geq abc\left(\dfrac{a-b}{c} + \dfrac{b-c}{a}\right)$. .... **2** *puncte*

c) Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$ cu proprietatea $a^3 + b^3 = c^3$. Arătaţi că cel puţin unul dintre numerele a, b, c este divizibil cu 3. .... **2** *puncte*

Soluţie.

a) Nici nu catadixesc să fac aceste elementare calcule.

b) Ditto. După simple transformări se ajunge la $(a-b)^3 + (b-c)^3 \geq 0$.

c) Ce ne facem dacă un concurent invocă faptul, demonstrat deja de Euler, că această ecuaţie admite doar soluţiile întregi triviale, în care una dintre necunoscute este zero? Prin urmare, pentru **orice** întreg nenul m, cel puţin unul dintre numerele a, b, c este divizibil cu m, **fiind nul**.

Soluţia intenţionată este probabil că, modulo 9, resturile cubice sunt doar 0 şi ± 1, deci (măcar) unul dintre a^3, b^3, c^3 este multiplu de 9. □

Remarcă. Nicio legătură între cele trei puncte; primele două – banale calcule, iar al treilea – trăind în păcat. Puncte gratuite.[5]

Subiectul (4). *Fie A o mulţime formată din cinci numere naturale, şi fie $S = A + A = \{x + y \mid x, y \in A\}$. Să se arate că dacă mulţimea S are nouă elemente, atunci suma numerelor din mulţimea A este divizibilă cu 5.*

Rezultatul mai general este următoarea teoremă, care pune în adevărata sa lumină rezultatul parţial cerut mai sus.

Fie $A \subset \mathbb{R}$ cu $|A| = n$. Atunci $|A + A| \geq 2n - 1$, cu egalitate dacă şi numai dacă A este o progresie aritmetică.[6]

[5] Dire Straits – Money for nothin' (and chicks for free).

[6] Problema 4, clasa a IX-a, ONM 2009, spune chiar mai mult. Fie $A, B \subset \mathbb{R}$ cu $|A| = n$, $|B| = m$, şi $n, m \geq 2$. Atunci $|A + B| \geq n + m - 1$, cu egalitate dacă şi numai dacă A şi B sunt progresii aritmetice de aceeaşi raţie. În cazul nostru luăm $A = B$.

Soluţie. Fie $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ elementele lui A. Avem

$$2x_1 < x_1 + x_2 < \cdots < x_{k-1} + x_k < 2x_k < x_k + x_{k+1} < \cdots < x_{n-1} + x_n < 2x_n,$$

deci $|A + A| \geq 2n - 1$. Pentru $|A + A| = 2n - 1$, deoarece avem de asemenea $x_{k-1} + x_k < x_{k-1} + x_{k+1} < x_k + x_{k+1}$, rezultă că $2x_k = x_{k-1} + x_{k+1}$, pentru orice $1 < k < n$, deci A este o progresie aritmetică de raţie $r = x_{k+1} - x_k$ $(1 \leq k < n)$.

Atunci suma Σ a elementelor lui A este $n\left(x_1 + \dfrac{n-1}{2}r\right)$, deci dacă $A \subset \mathbb{N}$ şi n este impar, rezultă $n \mid \Sigma$. Cerinţa problemei este deci ocultă, şi ascunde adevăratul fenomen. Un lucru din păcate obişnuit în ultimul timp, acela de a cere un rezultat parţial, mai slab, când de fapt se ştie mult mai mult. Am o oarecare bănuială asupra provenienţei acestei probleme, dar pentru moment o voi păstra *sub rosa*. □

Remarcă. În mod ciudat (sau poate tocmai că nu), rezultatele la această problemă sunt extrem de slabe.

Puncte	$7-6$	$5-4$	$3-2$	$1-0$
# Note (Sub. 4)	1	2		43

Contextul este reminiscent de Problema 4, jBMO 2013, unde ordonarea celor cinci numere şi compararea sumelor de câte două se făceau în mod asemănător. Ce minunat ar fi dacă problemele – şi soluţiile – concursurilor importante ar fi studiate de acei participanţi care se doresc competitivi.

8. Încheiere

Scrierea în WORD este anacronică în zilele noastre, când LaTeX este curent folosit, şi permite o prezentare mult mai elegantă şi estetic plăcută. Lipsesc soluţiile oficiale la probele pe clasă; un concurs nu devine educativ decât când concurenţii, după ce au avut poate dificultăţi cu unele probleme, pot învăţa din soluţiile oficiale, care trebuie să fie un model de claritate, cu metode alternative şi trimiteri la alte rezultate teoretice ...

S-a renunţat, din fericire, la menţionarea autorilor problemelor pe foile de concurs; poate dintr-o binevenită modestie în această fază preliminară (desigur, toate creditele cuvenite trebuie date în cadrul prezentării soluţiilor), dar în orice caz scutindu-i de stropii uneori acizi din pana mea.

Rezultatele erau anunţate pentru sâmbătă, orele 19:00, dar nu apăruseră nici la 23:00; promisiuni goale ... rezultatele probei Seniori apar la 23:15, dar nu şi celelalte, şi nici măcar duminică; rezultatele probei Juniori apar luni. Din diverse surse, corectura Testului Juniori ar putea avea ceva cusururi !?!

Noroc de un site "mai ciudat" `http://stv.unashost.com/` (Şcoala Ta Virtuală)! (Acum rezultatele apar şi pe site-ul şcolii organizatoare, dar nu şi subiectele de la concursul de gimnaziu – care se găsesc însă pe site-ul `http://ssmr.ro` – nici soluţiile lor oficiale, care nu se găsesc nicăieri.
`http://www.scoala5calarasi.ro/barbilian.php`).