PREZENTARE CONCURSUL CĂLĂRAŞI 2012

Abstract. Presentation with original solutions of the problems given at the Juniors Test, and some selected other problems from the Călăraşi Competition, 2012.

Data: 28 octombrie 2012.
Autor: Dan Schwarz, Bucureşti.

1. Introducere

Această prezentare, însoţită de comentarii şi de soluţiile originale ale autorului, asupra Testului Juniori, precum şi a unor probleme spicuite de la concursurile pe clasă (gimnaziu) de la concursul Călăraşi 2012, este, după cum ne-am obişnuit, opinia personală a autorului.[1]

Voi indica prin culoarea roşie eventualele erori, sau notaţiile abuzive din enunţurile originale, şi prin culoarea verde varianta de preferat (sau care lipsea din enunţ sau soluţie). Voi folosi în mod predilect şi culoarea albastră pentru comentariile personale.

2. Testul Cupa Dunării – Juniori

Subiectul (1).

a) *Arătaţi că, oricare ar fi* $a, b, c \in \mathbb{N}$*, numerele* $ab+1$*,* $bc+1$ *şi* $ca+1$ *nu pot fi simultan pătrate perfecte pare.*

b) *Arătaţi că există o infinitate de numere naturale distincte două câte două* a, b, c *şi* d*, astfel încât numerele* $ab+1$*,* $bc+1$*,* $cd+1$ *şi* $da+1$ *să fie simultan pătrate perfecte.*

Soluţie.

a) Pătratele perfecte pare sunt multipli de 4. În acest caz am avea $ab, bc, ca \equiv -1 \pmod 4$, deci $(abc)^2 = (ab)(bc)(ca) \equiv -1 \pmod 4$, absurd.

b) Luând $d = 0$, avem $cd+1 = da+1 = 1^2$ pentru orice a, b, c, deci este suficient să găsim numere naturale nenule distincte a, b, c astfel încât $ab+1$ şi $bc+1$ să fie simultan pătrate perfecte. Să luăm atunci $a = n-2$, $b = n$ şi $c = n+2$, pentru $n > 2$ natural. Vom avea $ab+1 = (n-2)n+1 = (n-1)^2$ şi $bc+1 = n(n+2)+1 = (n+1)^2$. □

[1] Consultaţi problemele şi soluţiile oficiale ale Testului Seniori, precum şi enunţurile complete la probele pe clasă (gimnaziu numai), de asemenea rezultatele complete, la `http://ssmr.ro/activitati/concursuri/Ion_Barbu_2012`.

Soluţie Alternativă.

b) Un triplet (p, q, r) de numere naturale (distincte), cu proprietatea că $pq + 1$, $qr + 1$ şi $rp + 1$ sunt simultan pătrate perfecte, produce, luând

$$s = p + q + r + 2pqr + 2\sqrt{(pq + 1)(qr + 1)(rs + 1)} > \max\{p, q, r\},$$

un patruplet (p, q, r, s) având proprietatea că produsul a oricare două dintre elementele sale + 1 este pătrat perfect. Cel mai mic astfel de triplet (nenul) este $(0, 1, 3)$; acesta produce $(0, 1, 3, 8)$, şi acum $(1, 3, 8)$ produce $(1, 3, 8, 120)$, un exemplu găsit deja de PIERRE DE FERMAT.

Demonstraţie. Valorile $s = p+q+r+2pqr\pm 2\sqrt{(pq + 1)(qr + 1)(rs + 1)}$ sunt rădăcinile ecuaţiei pătratice

$$s^2 - 2(p + q + r + 2pqr)s + p^2 + q^2 + r^2 - 2(pq + qr + rp) - 4 = 0,$$

care se scrie şi ca

$$p^2 + q^2 + r^2 + s^2 - 2(pq + qr + rp + ps + qs + rs) - 4pqrs - 4 = 0,$$

la rândul ei putând fi scrisă în modurile

$$\begin{aligned}(p + q - r - s)^2 &= 4(pq + 1)(rs + 1),\\ (p + s - q - r)^2 &= 4(qr + 1)(ps + 1),\\ (p + r - q - s)^2 &= 4(rp + 1)(qs + 1).\end{aligned}$$

Dar cum $pq+1$, $qr+1$ şi $rp+1$ sunt presupuse a fi simultan pătrate perfecte, rezultă şi că $rs + 1$, $ps + 1$ şi $qs + 1$ sunt simultan pătrate perfecte. ■

Prin urmare putem genera, prin această metodă, infinit de multe patruplete (a, b, c, d) de numere naturale distincte, având proprietatea că produsul a oricare două dintre elementele lor + 1 este pătrat perfect, **mai mult** decât cerutele $ab + 1$, $bc + 1$, $cd + 1$ şi $da + 1$ (având şi $ac + 1$ şi $bd + 1$). □

Subiectul (2)**.** *Fie numărul natural prim $p > 5$. Din scrierea zecimală a numărului $\frac{1}{p}$ se elimină la iîntâmplare 2012 cifre aflate după virgulă. Arătaţi că numărul rămas poate fi reprezentat sub forma $\frac{a}{b}$, unde a şi b sunt numere naturale prime iîntre ele, iar b este multiplu al lui p.*

Soluţie (Imaginară). Chiar dacă nu ştim nimic despre reprezentarea zecimală a fracţiilor, problema este trivială. Fie $c_1, c_2, \ldots, c_n$ cifrele zecimale eliminate, aflate pe poziţiile $p_1, p_2, \ldots, p_n$, şi $N = \max\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Atunci

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{p} - \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{10^{p_k}} = \frac{1}{p} - \frac{K}{10^N} = \frac{10^N - pK}{p10^N}.$$

Cum evident $10^N - pK$ şi p sunt prime între ele, rezultă că $p \mid b$ (chiar şi după posibile simplificări). Unde este greşeala? □

Altfel, scrierea zecimală a lui $\frac{1}{p}$ este periodică, $\frac{1}{p} = 0,(d_1d_2\dots d_k)$. După eliminarea a n cifre, se crează o parte "mixtă", formată din N cifre, urmată iarăşi de partea periodică, deci $\frac{a}{b} = 0,m_1m_2\dots m_N(d_1d_2\dots d_k)$. Prin urmare

$$\frac{a}{b} = \frac{\overline{m_1m_2\dots m_N}}{10^N} + \frac{1}{10^N p} = \frac{Mp+1}{10^N p},$$

unde $M = \overline{m_1m_2\dots m_N}$. Cum evident $Mp+1$ şi p sunt prime între ele, rezultă că $p \mid b$ (chiar şi după posibile simplificări).

Remarcă. Evident, am lucrat cu $n = 2012$; de asemenea, nu contează că numărul p este prim, ci doar că nu se divide prin 2, nici prin 5. Pentru orice fracţie $\frac{r}{p}$, cu p ca mai sus, şi $1 \leq r \leq p-1$ relativ prim cu p, demonstraţia rămâne valabilă, cu aceeaşi concluzie $p \mid b$. De fapt, se poate spune chiar mai mult, anume că dacă $p = 2^\alpha 5^\beta q$, cu $\alpha, \beta \geq 0$, iar $q > 1$ coprim cu 2 şi 5, atunci $q \mid b$.

Clarificări. Fie o fracţie $\frac{a}{p}$, cu $p > 1$ un întreg pozitiv relativ prim cu 10, şi $1 \leq a \leq p-1$. Fie k ordinul (multiplicativ) al lui 10 modulo p, adică cel mai mic întreg pozitiv pentru care $p \mid 10^k - 1$. Atunci $10^k - 1 = pK$. Vom avea $aK < 10^k - 1$, deci aK are cel mult k cifre în scrierea sa în baza 10. Vom scrie $aK = \overline{d_1d_2\dots d_k}$, unde eventual primele cifre la stânga sunt 0. Atunci

$$\frac{a}{p} = \frac{aK}{10^k - 1} = aK\left(\frac{1}{10^k} + \frac{1}{10^{2k}} + \cdots\right) = 0,(aK)$$

deci scrierea zecimală a lui $\frac{a}{p}$ este periodică. $\square$

Subiectul (3)**.** *Fie triunghiul ABC având $\mathrm{m}(\angle BAC) = 90°$. Bisectoarea unghiului $\angle ACB$ intersectează segmentul (AB) în punctul E. Dacă există $D \in (CE)$ astfel încât $\mathrm{m}(\angle DAC) = \mathrm{m}(\angle BDE) = x°$, atunci calculaţi x.*

Exprimarea din enunţ este nefericită. Un astfel de punct D întotdeauna există, anume $D \equiv I$, centrul cercului înscris în $\triangle ABC$, pentru care $\angle IAC = \angle BIE = 45°$.[2] Altfel, din considerente de continuitate, când D parcurge CE, de la D spre E, unghiul $\angle DAC$ creşte de la $0°$ la $90°$, iar unghiul $\angle BDE$ creşte de la $\frac{1}{2}\angle C$ la $90° - \frac{1}{2}\angle C$. Dar aceasta înseamnă că funcţia continuă $f(D) = \angle BDE - \angle DAC$ ia valorile $f(C) = \frac{1}{2}\angle C > 0$ şi $f(E) = -\frac{1}{2}\angle C < 0$, deci trebuie să existe (măcar) un punct D pentru care $f(D) = 0$. Iar dacă mai multe există, cum se cere **determinarea** unui (unic) x, tot valoarea 45 trebuie să fie. Poate că exact această observaţie ar trebui să conducă la eleganta soluţie sintetică ce urmează, unde se demonstrează că $D \equiv I$ este **singurul** astfel de punct.

[2] Mă voi dispensa de a scrie $\mathrm{m}(\angle\alpha)$, folosind pur şi simplu scrierea $\angle\alpha$. Deşi poate că nu este tocmai pedagogic, notaţiile sunt mult uşurate, şi asta este ceea ce contează.

Soluţie. (Ioan Laurenţiu Ploscaru)

Fie T simetricul punctului A faţă de dreapta CE; evident $T \in (BC)$, deoarece CE este bisectoarea lui $\angle ACB$. Dar atunci $\angle BDE = \angle DAC = \angle DTC$, prin urmare $\angle BDC = \angle BTD$. Înseamnă că triunghiurile $\triangle BDC$ şi $\triangle BTD$ sunt asemenea, deci $\angle TDB = \frac{1}{2}\angle C$. Dar şi $\angle TAB = \frac{1}{2}C$, deci $\angle TAB = \angle TDB$, şi deci patrulaterul $ABTD$ este inscriptibil. De aici rezultă $\angle BAD = \angle DTC = \angle DAC$, deci AD este bisectoarea unghiului $\angle BAC$ (şi evident, atunci şi BD este bisectoarea unghiului $\angle ABC$, prin urmare D este centrul I al cercului înscris în $\triangle ABC$). Aşadar $x = 45$. $\square$

Soluţie Trigonometrică. Fie B' piciorul perpendicularei din B pe CE, fie D' piciorul perpendicularei din D pe AC, şi fie $\lambda = CD$. Avem

$$\tan\angle DAC = \frac{DD'}{AD'} = \frac{\lambda \sin\dfrac{C}{2}}{AC - \lambda\cos\dfrac{C}{2}},$$

$$\tan\angle BDE = \frac{BB'}{D'B'} = \frac{BC\sin\dfrac{C}{2}}{BC\cos\dfrac{C}{2} - \lambda}.$$

Dar atunci, din $\angle DAC = \angle BDE$, avem şi $\tan\angle DAC = \tan\angle BDE$, deci

$$\frac{\lambda \sin\dfrac{C}{2}}{AC - \lambda\cos\dfrac{C}{2}} = \frac{BC\sin\dfrac{C}{2}}{BC\cos\dfrac{C}{2} - \lambda}.$$

Cum $\sin\dfrac{C}{2} \neq 0$, rezultă $\lambda^2 - 2\lambda BC\cos\dfrac{C}{2} + AC\cdot BC = 0$, cu rădăcinile

$$\lambda_{1,2} = BC\cos\frac{C}{2} \pm BC\sqrt{\cos^2\frac{C}{2} - \frac{AC}{BC}}.$$

Având şi $AC = BC\cos C$, deci $\cos^2\dfrac{C}{2} - \dfrac{AC}{BC} = \sin^2\dfrac{C}{2}$, obţinem în cele din urmă $\lambda_{1,2} = BC\left(\cos\dfrac{C}{2} \pm \sin\dfrac{C}{2}\right)$. Dar cum $BC\cos\dfrac{C}{2} = CB' > CE$, iar $\cos\dfrac{C}{2} > \sin\dfrac{C}{2}$, singura valoare permisă este $\lambda = BC\left(\cos\dfrac{C}{2} - \sin\dfrac{C}{2}\right)$. Aceasta înseamnă că un astfel de punct D este unic determinat, şi cum $D \equiv I$ verifică, totul este demonstrat. Oricum, din formula pentru $\tan\angle DAC$ avem

$$\tan\angle DAC = \frac{\lambda\sin\dfrac{C}{2}}{AC - \lambda\cos\dfrac{C}{2}} = \frac{\left(\cos\dfrac{C}{2} - \sin\dfrac{C}{2}\right)\sin\dfrac{C}{2}}{\cos C - \left(\cos\dfrac{C}{2} - \sin\dfrac{C}{2}\right)\cos\dfrac{C}{2}} = 1,$$

adică $x^\circ = \angle DAC = 45^\circ$. $\square$

Subiectul (4)**.** *Fie $A \subset \{1, 2, \ldots, 26\}$, cu 7 elemente. Arătaţi că există două submulţimi distincte ale lui A, având aceeaşi sumă a elementelor lor.*

Soluţie. Mulţimea A are $2^7 - 1 = 127$ submulţimi nevide. Dintre acestea, una are 7 elemente, 7 au 6 elemente, şi 21 au 5 elemente. Prin urmare $127-1-7-21 = 98$ submulţimi nevide ale mulţimii A au cel mult 4 elemente. Suma maximă a elementelor unei submulţimi cu 4 elemente a lui $\{1, 2, \ldots, 26\}$ este însă $26+25+24+23 = 98$. Dacă $26, 25, 24, 23 \in A$, atunci submulţimile sale $\{23, 26\}$ şi $\{24, 25\}$ ar avea aceeaşi sumă. Dacă nu, atunci, din principiul cutiei, două submulţimi distincte ale sale cu cel mult 4 elemente, fie ele B şi C, vor avea aceeaşi sumă a elementelor lor; mai mult, atunci vor exista şi două astfel de submulţimi disjuncte, anume $B \setminus C$ şi $C \setminus B$.

O mulţime cu 6 elemente, cu sume distincte ale elementelor tuturor submulţimilor sale, este $A_6 = \{11, 17, 20, 22, 23, 24\}$, ceea ce deci exhibă un contraexemplu cu $|A| = 6$. Singura astfel de mulţime cu 7 elemente, având elementul cel mai mare minim, este $A_7 = \{20, 31, 37, 40, 42, 43, 44\}$. Aceasta arată că rezultatul din problemă rămâne adevărat pentru $A \subset \{1, 2, \ldots, 43\}$, dar rezultatele de mai sus au fost obţinute prin programe de calculator! □

Remarcă. Metoda este bine-cunoscută; de pildă ea este folosită în Problema 12, AIME 1986. O problemă similară, cu $A \subset \{1, 2, \ldots, 100\}$ şi $|A| = 10$, se rezolvă chiar mai rapid, căci suma celor mai mari 10 numere posibile este $91 + \cdots + 100 = 955 < 1023 = 2^{10} - 1$ submulţimi nevide ale lui A. De fapt singurul contraexemplu cu 9 elemente, având elementul cel mai mare minim, este $A_9 = \{77, 117, 137, 148, 154, 157, 159, 160, 161\}$ (dar există mulţimi A_8 cu elementul cel mai mare egal cu 84), deci $|A| = 9$ era suficient.

Pe de altă parte, Problema 18, Baltic Way 1998, găseşte o astfel de mulţime cu n elemente, toate mai mici decât 2^{n-1}, pentru orice $n \geq 4$. Astfel, pentru $n = 4$, mulţimea $A_4 = \{3, 5, 6, 7\}$ satisface. Dacă o astfel de mulţime $A_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ satisface, atunci va satisface şi mulţimea $A_{n+1} = \{1, 2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_n\}$.

În aceeaşi ordine de idei, vă prezint următoarea

Problemă. *O mulţime S este formată din n numere reale (strict) pozitive. Arătaţi că nu mai mult de $\dfrac{2^n}{n+1}$ dintre submulţimile sale pot avea o aceeaşi sumă a elementelor lor.*

Soluţie. Vă las plăcerea să o rezolvaţi singuri ... □

Rezultatele Testului Juniori nu sunt deloc concludente, căci numai 14 concurenţi au participat, dintre care doar 5 din România. Probabil este vorba de o excelentă popularizare, sau am sărăcit complet în generaţia noastră de schimb. Iar punctajele ...

Subiect/Puncte	7 − 6	5 − 4	3 − 2	1 − 0
1	4	1	4	5
2		2		12
3	1			13
4	4			10

Subiectul (3)**.**
a) Să dse determine mulţimea $M = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 5x + 7y = 1\}$.
b) Să se determine cel mai mare număr natural n *care nu poate fi scris sub forma* $n = 5x + 7y$, *unde* $x, y \in \mathbb{N}$. *Justifică răspunsul.*

Maria Pop, Cluj

Soluţie. Aproape că nici nu merită să-mi bat gura ... Cum poate fi **semnată** o astfel de problemă? Presupun că autorii celor două probleme prezentate aici sunt înrudiţi; ar trebui poate o mai mare grijă în a evita astfel de lucruri.

a) Este clasicul rezultat că dacă $p, q \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ cu $\text{c. m. m. d. c.}(p, q) = 1$, atunci există $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ astfel încât $px + qy = 1$, şi anume, dacă (x_0, y_0) este o soluţie, atunci există $m \in \mathbb{Z}$ pentru care $x = x_0 - mq$ şi $y = y_0 + mp$. Cum $(x_0, y_0) = (3, -2)$ este o soluţie pentru $(p, q) = (5, 7)$, înseamnă că

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 5x + 7y = 1\} = \{(3 - 7m, -2 + 5m) \mid m \in \mathbb{Z}\}.$$

b) Este la fel de clasicul rezultat, cunoscut sub numele de Sylvester, Frobenius, sau "Chicken McNugget", care afirmă că, în condiţiile de mai sus, cel mai mare număr natural n care nu poate fi scris sub forma $n = px+qy$, cu $x, y \in \mathbb{N}$, este $n = pq - p - q$ (şi deci toate numerele $n \geq (p - 1)(q - 1)$ pot fi astfel reprezentate). Aşadar, la noi, $n = 23$. □

Remarcă. Rezultatele sunt cele de aşteptat, în aceste condiţii

Puncte	$7-6$	$5-4$	$3-2$	$1-0$
# Note		3	4	100

Astfel de rezultate teoretice, sau sunt cunoscute de concurenţi (ceea ce se pare că nu era cazul), sau au o şansă minimă de a fi "descoperite" în focul luptei, în toiul unei competiţii.

Subiectul (4)**.** *Un bloc în formă de cub este format din* 27 *de camere identice. Cu excepţia camerei centrale, care este inaccesibilă, se poate trece din orice cameră în orice cameră vecină (două camere sunt vecine dacă au un perete comun pe orizontală sau verticală).*
a) Pot fi împărţite cele 26 *de camere accesibile în* 13 *perechi de câte două camere vecine? Justifică răspunsul.*
b) Poate cineva să viziteze toate camerele accesibile trecând o singură dată prin fiecare? Justifică răspunsul.

Vasile Pop, Cluj

Soluţie. Facem o colorare alternativă alb-negru a celor 27 de camere (cuburi mici în care este împărţit cubul mare), ca la o tablă de şah tridimensională, să zicem având cubul din stânga-faţă-jos colorat în alb. Avantajul acestei colorări este că acum **camere vecine sunt colorate diferit**. O simplă numărare arată că dintre cele 26 de camere accesibile, 14 sunt colorate în alb, şi 12 în negru (camera inaccesibilă primeşte culoarea negru).

a) Răspunsul este deci NU, căci fiecare pereche de câte două camere vecine conţine câte una din fiecare culoare, deci ar trebui să fie 13 albe şi 13 negre.

b) Răspunsul este tot NU, căci camerele vecine din orice drum trebuie să fie colorate diferit. Un drum care trece o singură dată prin fiecare cameră accesibilă ar trebui deci să conţină 13 camere albe şi 13 negre.

Un răspuns rapid, bazat pe punctul a), este că dacă un astfel de drum ar exista, am putea partiţiona cele 26 de camere accesibile în 13 perechi de câte două camere vecine, luând pur şi simplu camerele $(1, 2), (3, 4), \ldots, (25, 26)$ din drum. Astfel, se vede că punctul a) a fost intenţionat drept "ajutător".

În limbaj de Teoria Grafurilor, fie graful având drept vârfuri cele 26 de camere accesibile, şi drept muchii perechile de camere vecine. Punctul a) întreabă despre existenţa unui cuplaj perfect, iar punctul b) întreabă despre existenţa unui drum Hamiltonian (care ar da un astfel de cuplaj perfect). $\square$

Remarcă. Simona Diaconu îmi atrage atenţia că o problemă în care cubul central este şi el accesibil a fost utilizată ca Problema 14, Stanford University EPGY, 2008. Întrebarea era dacă există un drum Hamiltonian cu originea în cubul central, iar răspunsul este NU, din motivele invocate mai sus. Desigur, există alte drumuri Hamiltoniene (cu originea într-un colţ, de exemplu).

Etaj I

1	2	3
6	5	4
7	8	9

Etaj II

18	17	16
13	14	15
12	11	10

Etaj III

19	20	21
24	23	22
25	26	27

Problema a fost dată şi la clasa a V-a (Subiectul 4), şi clasa a VII-a (Subiectul 3, punctul c)), fără punctul "ajutător" a). Rezultatele nu au fost pe măsură, poate printre altele şi pentru că era mai simplu să se spună 27 de cuburi mici, cu latura o treime din cea a cubului mare, enunţul putând fi neclar aşa cum a fost prezentat. Rezultatele au fost după cum urmează

Clasa/Puncte	7 − 6	5 − 4	3 − 2	1 − 0
a V-a		3	23	167
a VI-a	5			102
a VII-a	2	8	26	76

4. Clasa a VII-a

Subiectul (3)**.**

a) Pentru $n \in \mathbb{N}^*$*, să se calculeze că suma primelor* $3n$ *zecimale ale numărului* $a = (1/2)^{10n}$.

b) Arătaţi că $\frac{1}{5} + \frac{1}{11} + \frac{1}{19} + \cdots + \frac{1}{2012^2 + 2011} > \frac{1}{2}$.

Gheorghe Fianu, Ştefan cel Mare

c) Subiectul 4 de la clasa a VI-a, discutat mai sus.

Soluţie.

a) Avem $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{10n} = \left(\frac{1}{2^{10}}\right)^n = \left(\frac{1}{1024}\right)^n < \left(\frac{1}{1000}\right)^n = \left(\frac{1}{10}\right)^{3n}$, deci suma primelor $3n$ zecimale ale numărului a este zero.

b) Avem, pentru $n > 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2+k} > \frac{1}{30} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2+(k+1)} = \frac{1}{30} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right),$$

ceea ce se telescopează la $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2+k} > \frac{1}{30} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$, deja mai mare decât $\frac{1}{2}$ pentru $n = 28$. A folosi $n = 2011$ este ceea ce americanii numesc "overkill"; decât dacă poate autorul a "inventat" o altă soluţie, mai grosolană. Chestiile astea afectează mai ales concurenţii mai buni, care se aşteaptă ca enunţul să fie cât de cât "strâns". □

5. Clasa a VIII-a

Subiectul (1)**.**

a) Să se rezolve în mulţimea numerelor întregi ecuaţia $x^4 - y^4 = 16$.

b) Găsiţi cel mai mare număr natural n *pentru care* $\frac{n^2-2012}{n+1} \in \mathbb{Z}$.

c) Găsiţi numerele reale a *şi* b *dacă* $\max\{a^2-b+1, b^2+a+1\} \leq \frac{3}{4}$.

Aurelia Caţaros & Gabriela Ruse, Călăraşi

Soluţie.

a) Avem $x^4 - y^4 = (x-y)(x+y)(x^2+y^2) = 2^4 = 16$. Din foarte puţinele cazuri rămâne doar $(x, y) = (\pm 2, 0)$.

b) Avem $\frac{n^2-2012}{n+1} = n - 1 - \frac{2011}{n+1}$. Din $n+1 \mid 2011$ rezultă că cel mai mare număr natural n cerut este $n+1 = 2011$, deci $n = 2010$.

c) Avem $\frac{3}{2} \geq (a^2-b+1) + (b^2+a+1) = \left(a+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(b-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$, deci $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(b-\frac{1}{2}\right)^2 \leq 0$, de unde $a = -\frac{1}{2}$ şi $b = \frac{1}{2}$. □

Subiectul (2)**.**

b) Se consideră 835 *de puncte în plan* $M_1, M_2, \ldots, M_{835}$ *şi un pătrat de latură* 1*. Să se arate că există două vârfuri adiacente* A *şi* B *ale pătratului, astfel încât suma perimetrelor triunghiurilor* $AM_1B, AM_2B, \ldots, AM_{835}B$ *să fie mai mare decât* 2012.

Vasile Pop, Cluj

Soluţie. Fie A, B, C, D, vârfurile pătratului. Notăm cu perim$(\mathcal{F})$ perimetrul unei figuri $\mathcal{F}$. Atunci $P_{AB} = \sum_{k=1}^{835} \text{perim}(AM_kB) = 835 + \sum_{k=1}^{835} AM_k + \sum_{k=1}^{835} BM_k$, şi celelalte asemănătoare. Prin urmare

$$P_{AB} + P_{BC} + P_{CD} + P_{DA} = 4 \cdot 835 + 2\sum_{k=1}^{835}(AM_k + BM_k + CM_k + DM_k).$$

Dar pentru orice punct M din plan avem

$AM + BM + CM + DM = (AM + CM) + (BM + DM) \geq AC + BD = 2\sqrt{2}$,

cu egalitate doar pentru $M \in AC \cap BD$, adică pentru M în centrul pătratului $ABCD$. Prin urmare

$$P_{AB} + P_{BC} + P_{CD} + P_{DA} \geq 4 \cdot 835(1 + \sqrt{2}) > 4 \cdot 2012.$$

Dar atunci (măcar) unul dintre cei patru termeni din stânga este mai mare decât 2012. $\square$

Remarcă. Cam prea multă geometrie (Subiectele 2,3 şi 4), în timp ce singura problemă de alt fel este trivială, în toate cele trei subpuncte ale sale.

À propos, sunt suficiente 834 de puncte! Probabil că autorul s-a gândit la soluţia $835(1 + \sqrt{2}) > 835(1 + 1.41) > 2012$, unde nu putem înlocui 835 cu 834. Dar evident, căutând cel mai mic întreg n pentru care $n(1+\sqrt{2}) > 2012$, adică $2n^2 > (2012 - n)^2$, ştiind că am făcut o aproximare prin adaos, putem încerca şi $n = 834$. Aceasta ne dă $1391112 > 1387684$, iar dacă încercăm şi $n = 833$, aceasta ne dă $1387778 < 1390041$, deci numărul căutat este $n = 834$.

6. Încheiere

Prea multe greşeli de tipar. Scrierea în Word este anacronică în zilele noastre, când LaTeX este curent folosit, şi permite o prezentare mult mai elegantă şi estetic plăcută. Lipsesc soluţiile oficiale la Testul Juniori şi probele pe clasă; un concurs nu devine educativ decât când concurenţii, după ce au avut poate dificultăţi cu unele probleme, pot învăţa din soluţiile oficiale, care trebuie să fie un model de claritate, cu metode alternative şi trimiteri la alte rezultate teoretice ...

Am auzit şi că la Testul Seniori a fost refuzată folosirea Teoremei lui Zsigmondy, *post factum*. S-a sugerat că un concurent trebuie să trimită un bileţel Comisiei, pentru a întreba dacă folosirea cutarei teoreme este permisă. Oricum acest lucru nu se poate face într-o competiţie internaţională, unde nu se mai pot pune întrebări după trecerea perioadei de graţie de $1/2$ oră. Trebuie să înţelegem că aceşti concurenţi super-specializaţi cunosc uneori metode pe care corectorii lor poate nu le-au întâlnit; mai mult, dacă o anumită teoremă chiar "omoară" o problemă, vina este a problemei, şi a celor care nu s-au gândit la acest lucru, şi nu a matematicianului înarmat pentru război, căruia i se spune să lupte "cu o mână legată la spate".