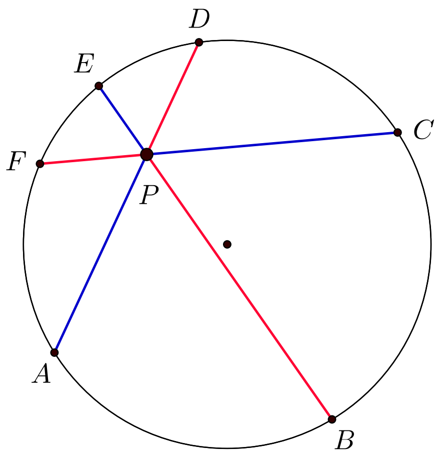
Cum folosim cazuri particulare în rezolvarea unor probleme

GHEORGHE ECKSTEIN[1]

Atunci când întâlnim o problemă pe care nu ştim s-o abordăm, adesea este bine să considerăm cazuri particulare ale acesteia. Putem astfel înţelege mai bine ,,universul” problemei şi să ne apropiem de rezolvarea ei. Vom ilustra cele de mai sus cu două exemple înrudite.

Problema 1. Fie P un punct situat în interiorul cercului $\mathscr{C}$. Prin punctul P se duc trei coarde care determină în jurul punctului P şase unghiuri de $60°$. Notăm A, B, C, D, E, F (în ordine) capetele acestor coarde. Arătaţi că

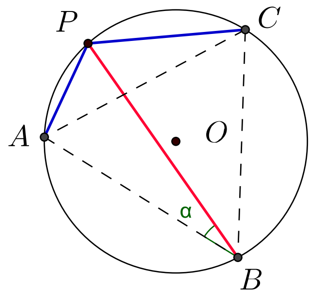
$$PA + PC + PE = PB + PD + PF.$$



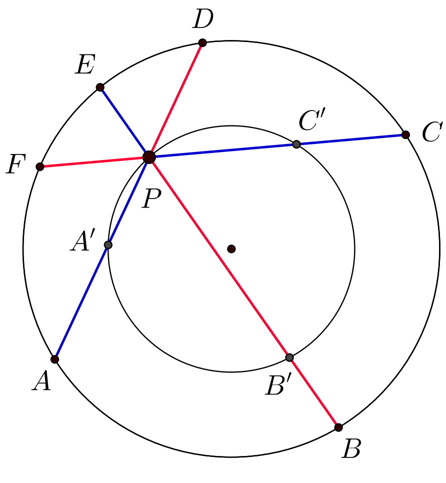
Soluţie:
Întrucât poziţia punctului P şi direcţiile coardelor sunt neprecizate, calcularea lungimii segmentelor este dificilă. Să remarcăm că enunţul trebuie să rămână valabil şi dacă ,,împingem” punctul P până la ,,margine”, adică dacă luăm punctul P pe cercul $\mathscr{C}$.
Cele trei coarde devin $[PA]$, $[PB]$, $[PC]$ şi A, B, C devin vârfurile unui triunghi echilateral înscris în cercul $\mathscr{C}$. Trebuie să arătăm că $PA + PC = PB$. Această proprietate a triunghiului echilateral este cunoscută. Ea se poate demonstra cu ajutorul unei rotaţii a figurii cu $60°$ în jurul vârfului A. O demonstraţie calculatorie: Fie $2\alpha = m(\sphericalangle POA)$. Atunci, dacă cercul $\mathscr{C}$ are raza de lungime r, $PA = 2r\sin\alpha$,

[1] articol apărut în RMT nr. 4/2004

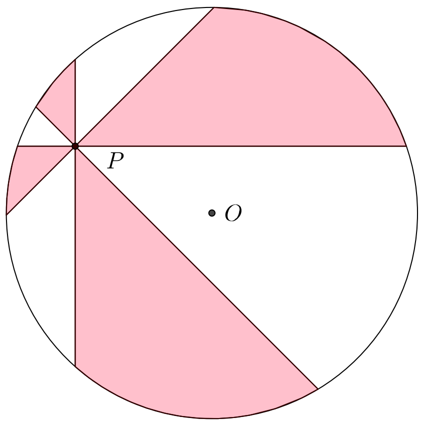
$PB = 2r\sin(\alpha + 60°)$, $PC = 2r\sin(\alpha + 120°)$ şi, cum $\sin\alpha + \sin(\alpha + 120°) = 2\sin(\alpha + 60°)\cos 60° = \sin(\alpha + 60°)$, rezultă $PA + PC = PB$.



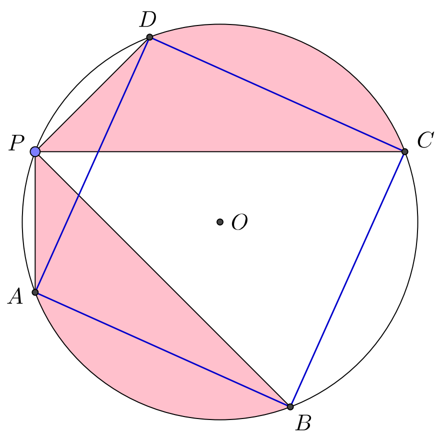
Cum putem folosi cazul particular? Să reluăm problema generală.
Să ducem prin P un cerc concentric cu $\mathscr{C}$ şi fie A', B', C' intersecţiile acestuia cu coardele. Conform cazului particular avem $PA' + PC' = PB'$. Însă segmentele $[AA']$ şi $[PD]$ determinate de cele două cercuri concentrice pe coarda $[AD]$ sunt congruente. Analog, $[PE] \equiv [BB']$ şi $[PF] \equiv [CC']$ de unde $PA + PC + PE = PA' + A'A + PC' + C'C + PE = PB' + PD + PE + PF = PB + PD + PF$.



Problema 2. (Problema împărţirii pizzei)[2]
Fie P un punct în interiorul cercului $\mathscr{C}$. Prin punctul P se duc patru coarde care determină în jurul punctului P opt unghiuri de $45°$. Se colorează în ,,alb" şi ,,roşu" (alternativ) cele opt ,,sectoare" formate. Atunci aria albă este egală cu aria roşie.



Soluţie:
Evident, nu ştim să calculăm aria sectoarelor din problemă. (Acest calcul se poate face folosind analiza matematică, dar cu mijloace care depăşesc nivelul cunoştinţelor de liceu.) Ca şi la problema precedentă, să vedem ce se întâmplă în cazul ,,limită": punctul P este situat pe cerc.

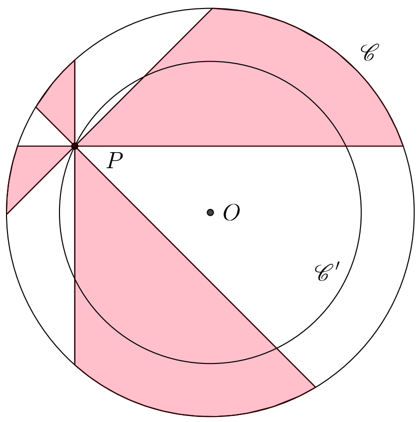


[2]sau Pizza theorem, vezi https://en.wikipedia.org/wiki/Pizza_theorem

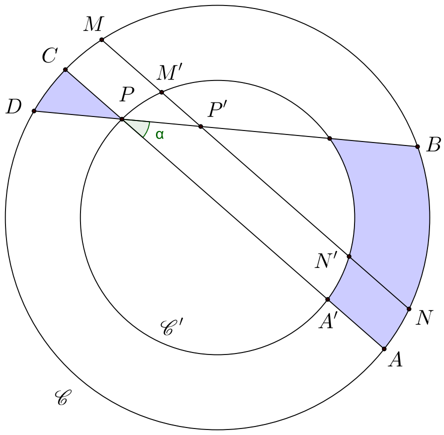
Fie $[PA]$, $[PB]$, $[PC]$, $[PD]$ cele patru coarde. Punctele A, B, C, D vor fi vârfurile unui pătrat. Aria roşie va fi formată din două segmente de cerc subîntinse de $[AB]$ şi $[CD]$ şi din triunghiurile PAB şi PCD. Deoarece suma distanţelor de la P la dreptele AB şi CD este egală cu latura pătratului, vom avea

$$\sigma(\Delta PAB) + \sigma(\Delta PCD) = \frac{1}{2}\,\sigma(ABCD),$$

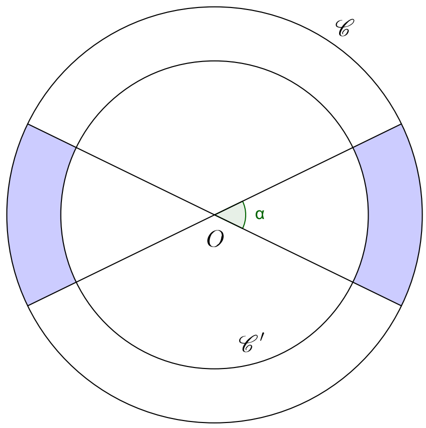
de unde rezultă că aria roşie este jumătate din aria discului, deci este egală cu aria albă.
Cum folosim acest caz particular la rezolvarea problemei generale?
Ca şi în problema precedentă, ducem prin P un cerc $\mathscr{C}'$ concentric cu $\mathscr{C}$. Atunci, conform cazului particular, ariile albă şi roşie din interiorul discului $\mathscr{C}'$ vor fi egale. Rămâne să arătăm că ariile albă şi roşie din interiorul coroanei cuprinse între $\mathscr{C}'$ şi $\mathscr{C}$ sunt egale.



Fie $P \in \mathscr{C}'$ şi $[AC]$ şi $[BD]$ două coarde care trec prin P şi care determină între ele un unghi α. Vrem să calculăm aria albastră (cuprinsă în coroană în unghiul α). Ducem $[MN]$ o coardă paralelă cu $[AC]$ şi notăm $\{P'\} = [BD] \cap [MN]$. Să examinăm cum s-a modificat aria albastră la deplasarea lui $[AC]$ până la $[MN]$. La aria iniţială s-a adăugat zona $CPM'M$ şi s-a scos zona $A'ANN'$.



Este uşor de văzut că cele două zone sunt simetrice faţă de mediatoarea lui $[AC]$, aşadar deplasând paralel coarda $[AC]$, aria albastră nu-şi schimbă mărimea.
Deplasând paralel ambele coarde, $[AC]$ şi $[BD]$, până când devin diametri, aria albastră se calculează uşor: ea este egală cu $\alpha\left(r^2 - r'^2\right)$ unde α este măsura în radiani a unghiului dintre coarde, iar r, r' razele cercurilor concentrice.



Revenind la problema noastră, constatăm că aria roşie din coroana construită este $2 \cdot \dfrac{\pi}{4}\left(r^2 - r'^2\right)$, adică jumătate din aria coroanei, ceea ce încheie demonstraţia.