A 58-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău

Probele de baraj pentru Olimpiada Balcanică de Matematică pentru Juniori 2014

Barem de corectare

BJ1. 1. Observaţia că $\frac{2}{2013-1}=\frac{1}{1006}$ ....1 p.

2. Observaţia că $\frac{m}{k-1}-\frac{m}{k+1}=\frac{2m}{k^2-1}$ (sau, în particular, pentru $m=2^n$ şi $k=2013^{2^{n-1}}$) ....3 p.

3. Sumarea relaţiilor din p. 2 pentru n = 1,2, ..., 2014 şi reducerea termenilor ....3 p.

BJ.2. 1. Scrierea ecuaţiei sub forma: $(y-2)x^2+(y-2)(y-4)x=(y-2)(y-3)+56$ ....1 p.

2. Scrierea ecuaţie sub forma: $(y-2)(x-1)(x+y-3)=56$ ....3 p.

3. Observaţia că numerele $x+y-3=(x-1)+(y-2),\ x-1,\ y-2$ sunt divizori ai lui 56 ....1 p.

4. Găsirea tuturor celor 6 soluţii ....2 p.

(dacă sunt omise unele soluţii se scade cel puţin 1 p.)

BJ.3. 1. Se arată că $A_{BIC}=BI\cdot IC\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}$ ....1 p.

2. Se determină lungimile laturilor segmentelor *DA*, *DC*, *AE*, *BE* prin lungimile laturilor triunghiului *ABC* (de ex., aplicând torema bisectoarei pentru triunghiul *ABC*) ....2 p.

3. Se determină BI prin *BD*, CI prin CE şi laturile triunghiului *ABC* ....2 p.

4. Se arată că $BI\cdot IC=a^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}$ şi $A_{BIC}=\frac{a^2}{4}$ ....2 p.

BJ.4. 1. Partiţia mulţimii *M* în 19 submulţimi V_i, i = 0, 1, 2, ..., 18...3 p.

2. Estimarea cardinalului mulţimii *A*, care nu conţine 2 numere *a* şi *b*, astfel încât *a* + *b* este divizibil prin 19:

2.1. *A* conţine cel mult un număr din V_0...1 p.

2.2. Examinarea mulţimilor V_i.şi V_{19-i}........................ ....1 p.

2.3. *A* conţine cel mult 9 submulţimi V_i., i = 1, 2, ..., 18 ....2 p.

BJ.5. 1. Exprimarea $n = 4k + r$, r = 0, 1, 2, 3 şi analiza cel puţin a unei expresii cu partea întreagă ....2 p.

2. Finalizarea cazului $n = 4k$ ....1 p.

3. Finalizarea cazului $n = 4k +1$ ....1 p.

4. Finalizarea cazului $n = 4k +2$ ....1 p.

5. Finalizarea cazului $n = 4k +3$ ....1 p.

6. Scrierea $A = (n + 2)^2$ sau $A = m^2$, $m \in$ N ....1 p.

BJ.6. 1. Se aplică inegalitatea $ab\le\frac{1}{4}(a+b)^2$ cu egalitate doar pentru $a = b$ ....1 p.

2. Se obţine . $2E\le\frac{1}{4}(8x+7y+8z)^2=\frac{1}{4}(8-y)^2\le 16$, adică $E \le 8$ ....3 p.

3. Egalitatea precedentă are loc pentru $y = 0$ ....1 p.

4. Se stabilesc condiţiile $x=z=\frac{1}{2}$ când are loc egalitatea $E = 8$ ....2 p.

BJ.7. 1. Considerarea punctului D simteric lui E faţă de BC . ...1 p.
2.Se arată că triunghiul BED este echilateral ....2 p.
3. $EO = CO = DO \Rightarrow DC \perp CE$ ....1 p.
4. $FC = CE = DC \Rightarrow m(\angle EDF) = 90^{o}$, $ED = DF$ ....1 p.
5. $BD = DE = DF \Rightarrow m(\angle BDF) = 90^{o} + 60^{o} = 150^{o}$ ....1 p.
6. $DF \parallel BC \Rightarrow m(\angle CBF) = m(\angle BFD) = 15^{o}$ ....1 p.

BJ.8. 1. Prezentare răspuns corect la p. a) ....1 p.
2. Argumentarea corectă a răspunsului la p. a) ....2 p.
3. Prezentare răspuns corect la p. b) ....1 p.
4. Argumentarea corectă a răspunsului la p. b) ....3 p.