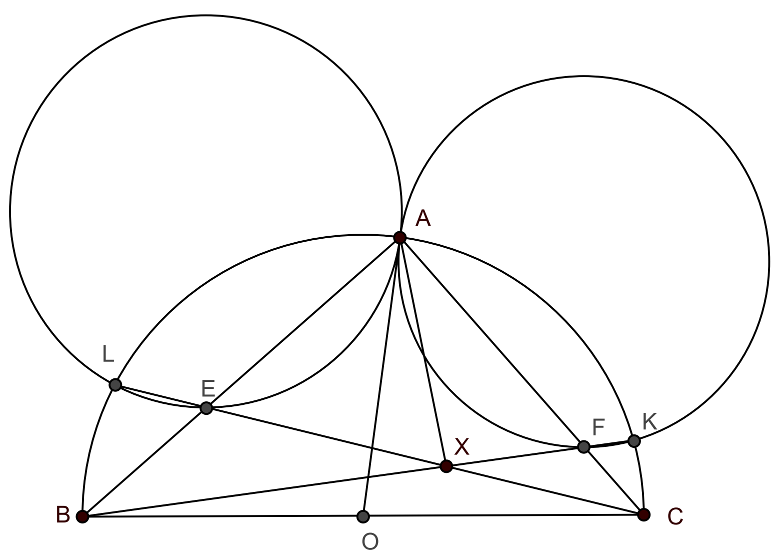
Al patrulea test de selecţie pentru OBMJ
Bucureşti, 24 mai 2013

Problema 1. Fie A un punct pe semicercul de diametru $[BC]$, iar X un punct oarecare din interiorul triunghiului ABC. Dreapta BX intersectează semicercul a doua oară în K şi latura (AC) în F, iar dreapta CX intersectează semicercul a doua oară în L şi latura (AB) în E. Arătaţi că cercurile circumscrise triunghiurilor AKF şi AEL sunt tangente.

Soluţie: Fie O mijlocul diametrului $[BC]$. Vom demonstra că AO este tangentă cercurilor circumscrise triunghiurilor AKF şi AEL, de unde va rezulta că cele două cercuri sunt tangente.

Deoarece triunghiul AOC este isoscel, avem $m(\angle CAO) = m(\angle ACO) = m(\angle AKB) = \dfrac{1}{2}m(\widehat{AF})$ (în cercul circumscris triunghiului AKF). De aici rezultă că AO este tangentă cercului circumscris triunghiului AKF. În mod analog se arată că AO este tangentă şi cercului circumscris triunghiului AEL, de unde concluzia.



Problema 2. Fie $a, b, c > 0$ astfel încât $a + b + c = 1$. Arătaţi că

$$\frac{1-a^2}{a+bc} + \frac{1-b^2}{b+ca} + \frac{1-c^2}{c+ab} \geq 6.$$

Soluţia 1: $\dfrac{1-a^2}{a+bc} + \dfrac{1-b^2}{b+ca} + \dfrac{1-c^2}{c+ab} \geq 6 \Leftrightarrow \left(\dfrac{1-a^2}{a+bc}+1\right) + \left(\dfrac{1-b^2}{b+ca}+1\right) + \left(\dfrac{1-c^2}{c+ab}+1\right) \geq 9 \Leftrightarrow$

$\dfrac{1-a^2+a+bc}{a+bc}+\dfrac{1-b^2+b+bc}{b+ca}+\dfrac{1-c^2+c+ab}{c+ab}\geq 9.$

Cum $a+b+c=1$, avem că $a-a^2=ab+ac$ şi analoagele, deci avem de demonstrat că

$$\frac{1+ab+bc+ca}{a+bc}+\frac{1+ab+bc+ca}{b+ca}+\frac{1+ab+bc+ca}{c+ab}\geq 9,$$

adică

$$[(a+bc)+(b+ca)+(c+ab)]\cdot\left(\frac{1}{a+bc}+\frac{1}{b+ca}+\frac{1}{c+ab}\right)\geq 9,$$

relaţie care rezultă imediat din inegalitatea dintre media armonică şi cea aritmetică.

Egalitate avem dacă $a+bc=b+ca=c+ab$ adică pentru $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

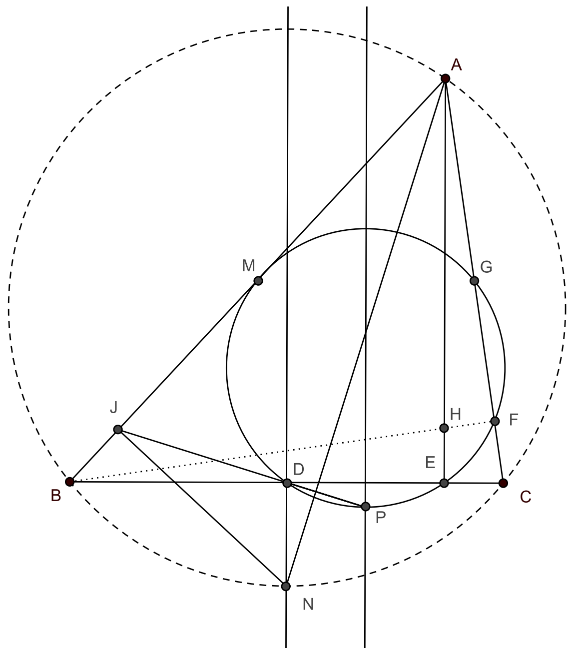
Soluţia 2: Folosind relaţia $a+b+c=1$, avem $a+bc=a(a+b+c)+bc=(a+b)(a+c)$ şi analoagele. Eliminând numitorii, inegalitatea de demonstrat se scrie echivalent
$2(a+b+c)-(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)\geq 6(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)+12abc$, adică $2(a+b+c)^3\geq 7(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)+12abc$. Desfăcând paranteza din membrul stâng şi reducând termenii asemnenea, relaţia revine la $2(a^3+b^3+c^3)\geq a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b$, adică la $(a-b)^2(a+b)+(b-c)^2(b+c)+(c-a)^2(c+a)\geq 0$, ceea ce este evident adevărat.

Egalitate avem dacă $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Problema 3. Fie D mijlocul laturii $[BC]$ a triunghiului ABC cu $AB\neq AC$ şi E proiecţia lui A pe BC. Dacă P este punctul de intersecţie a mediatoarei segmentului $[DE]$ cu perpendiculara din D pe bisectoarea unghiului BAC, demonstraţi că P aparţine cercului lui Euler al triunghiului ABC.

Soluţie: Vom trata numai cazul $AB>AC$, cazul $AB<AC$ fiind analog.
Fie $(AN$ bisectoarea unghiului BAC şi M mijlocul laturii AB. Deoarece P este pe mediatoarea segmentului $[DE]$, avem că $DP=PE$, deci $m(\angle DPE)=180^\circ-2m(\angle EDP)=180^\circ-2m(\angle NAE)=180^\circ-2\Big(m(\angle NAC)-m(\angle EAC)\Big)=180^\circ-m(\angle C)+m(\angle B)$.
Pe de altă parte, $m(\angle DME)=m(\angle BME)-m(\angle BMD)=180^\circ-2m(\angle B)-m(\angle A)=m(\angle C)-m(\angle B)=180^\circ-m(\angle DPE)$, deci patrulaterul $DPEM$ este inscriptibil. Cum punctele D,E,M sunt pe cercului lui Euler, rezultă concluzia.

Observaţie: Dacă N este, ca în figura de mai jos, punctul de intersecţie al bisectoarei din A cu mediatoarea laturii $[BC]$, iar J este punctul de intersecţie al dreptelor DP şi AB, atunci se arată uşor că patrulaterul $BJDN$ este inscriptibil, de unde $NJ\perp AB$. Rezultă că DP este chiar dreapta lui Simson corespunzătoare punctului N. Dacă H este ortocentrul triunghiului ABC, atunci conform unei probleme date la barajul al doilea, DP trece prin mijlocul lui $[HN]$, deci se află pe mediatoarea lui $[DE]$.
Rezultă că P este mijlocul lui $[HN]$ şi se arată uşor că acest punct se află pe cercul lui Euler al triunghiului ABC.



Problema 4. Pentru o secvenţă $(a_1, a_2, ..., a_{2013})$ de numere întregi, spunem despre un triplet (i, j, k) cu $1 \leq i < j < k \leq 2013$ că este *progresiv* dacă $a_k - a_j = a_j - a_i = 1$. Aflaţi numărul maxim de triplete *progresive* pe care le poate avea o secvenţă formată din 2013 numere întregi.

Soluţie: Considerăm următorele operaţii ce pot fi făcute unei secvenţe $(a_1, a_2, ..., a_{2013})$:
i) Dacă $a_{n+1} < a_n,\ n = \overline{1, 2012}$ schimbăm poziţiile celor două numere şi obţinem secvenţa $(a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_{n+1}, a_n, a_{n+2}, ..., a_{2013})$;
ii) Dacă $a_{n+1} = a_n + d + 1$ unde $n = \overline{1, 2012},\ d > 0$ atunci adunăm d la fiecare dintre numerele $a_1, a_2, ..., a_n$ şi obţinem secvenţa $(a_1 + d, a_2 + d, ..., a_n + d, a_{n+1}, ..., a_{2013})$.
Fie m numărul maxim de triplete *progresive* pe care le poate avea secvenţa $(a_1, a_2, ..., a_{2013})$. Este evident că aplicând prima operaţie secvenţei $(a_1, a_2, ..., a_{2013})$, m nu va scădea, în plus vom obţine o secvenţă de numere ordonată crescător. Aplicând a doua operaţie acestei secvenţe, de asemenea m nu va scădea şi vom obţine o secvenţă de tipul:
$(\underbrace{a, ..., a}_{t_1}, \underbrace{a+1, ..., a+1}_{t_2}, ..., \underbrace{a+s-1, ..., a+s-1}_{t_s})$, unde $t_1, t_2, ..., t_s$ sunt numerele de elemente din fiecare subsecvenţă, iar $s \geqslant 3$.
Pentru o astfel de subsecvenţă avem însă $m = t_1t_2t_3 + t_2t_3t_4 + ... + t_{s-2}t_{s-1}t_s$. Rămâne de găsit cel mai bun s şi cea mai bună partiţie a lui 2013 în s numere naturale nenule $t_1, t_2, ..., t_s$.
Maximul lui m se atinge pentru $s = 3$ sau $s = 4$. Dacă $s \geqslant 5$, atunci înlocuind partiţia $t_1, t_2, ..., t_s$ cu $t_2, t_3, (t_1 + t_4), ..., t_s$ vom obţine un m mai mare.
Pentru $s = 3$ avem $m = t_1t_2t_3 \leqslant (t_1 + t_2 + t_3)^3/27 = 671^3$, aşadar în acest caz valoarea maximă a lui m este 671^3 şi se obţine când $t_1 = t_2 = t_3 = 671$.
Pentru $s = 4$ avem $m = (t_1 + t_4)t_2t_3 \leqslant (t_1 + t_2 + t_3 + t_4)^3/27 = 671^3$ aşadar în acest caz valoarea maximă a lui m este 671^3 şi se obţine când $t_1 + t_4 = t_2 = t_3 = 671$.
Conchidem că maximul căutat este $m = 671^3$.