Al patrulea test de selecţie pentru OBMJ
Bucureşti, 24 mai 2013

Problema 1. Fie A un punct pe semicercul de diametru $[BC]$, iar X un punct oarecare din interiorul triunghiului ABC. Dreapta BX intersectează semicercul a doua oară în K şi latura (AC) în F, iar dreapta CX intersectează semicercul a doua oară în L şi latura (AB) în E. Arătaţi că cercurile circumscrise triunghiurilor AKF şi AEL sunt tangente.

Problema 2. Fie $a, b, c > 0$ astfel încât $a + b + c = 1$. Arătaţi că

$$\frac{1-a^2}{a+bc} + \frac{1-b^2}{b+ca} + \frac{1-c^2}{c+ab} \geq 6.$$

Problema 3. Fie D mijlocul laturii $[BC]$ a triunghiului ABC şi E proiecţia lui A pe BC. Dacă P este punctul de intersecţie a mediatoarei segmentului $[DE]$ cu perpendiculara din D pe bisectoarea unghiului BAC, demonstraţi că P aparţine cercului lui Euler al triunghiului ABC.

Problema 4. Pentru o secvenţă $(a_1, a_2, ..., a_{2013})$ de numere întregi, spunem despre un triplet (i, j, k) cu $1 \leq i < j < k \leq 2013$ că este *progresiv* dacă $a_k - a_j = a_j - a_i = 1$. Aflaţi numărul maxim de triplete *progresive* pe care le poate avea o secvenţă formată din 2013 numere întregi.