A 57-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA
A doua probă de evaluare, Olimpiada Balcanică de Matematică pentru Juniori 2013, 16 martie 2013

BJ5. Numerele reale a, b, c sunt pozitive, iar numerele reale $p, q, r \in \left[0;\ \frac{1}{2}\right]$ satisfac egalitatea $p+q+r=1$. Să se demonstreze inegalitatea

$$pab + qbc + rca \leq \frac{1}{8} \cdot (a+b+c)^2.$$

BJ6. Să se determine toate tripletele de numere reale (x, y, z) care satisfac ecuaţia

$$4xyz = x^4 + y^4 + z^4 + 1.$$

BJ7. Punctele M şi N sunt situate respectiv pe diagonala (AC) şi latura (BC) ale pătratului $ABCD$ astfel încât $MN = MD$. Să se determine măsura unghiului MDN.

BJ8. Un punct $M(x, y)$ al planului cartezian de coordonate xOy se numeşte laticeal dacă el are coordonate întregi. Fiecare punct laticeal se colorează în roşu sau albastru. Să se demonstreze că în plan există cel puţin un dreptunghi cu vârfuri laticeale de aceeaşi culoare.

Timp de lucru : 4 ore şi 30 min. **Fiecare problemă se apreciază cu 7 puncte.**

57-ая МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПАДА РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА
Второй отборочный тур для ЮБМО 2013, 16 марта 2013 года

BJ5. Действительные числа a, b, c положительны, а действительные числа $p, q, r \in \left[0;\ \frac{1}{2}\right]$ удовлетворяют равенству $p+q+r=1$. Докажите неравенство

$$pab + qbc + rca \leq \frac{1}{8} \cdot (a+b+c)^2.$$

BJ6. Определите все тройки действительных чисел (x, y, z), которые удовлетворяют уравнению

$$4xyz = x^4 + y^4 + z^4 + 1.$$

BJ7. Точки M и N расположены соответственно на диагонали (AC) и стороне (BC) квадрата $ABCD$ так, что $MN = MD$. Определите величину угла MDN.

BJ8. Точка $M(x, y)$ координатной плоскости xOy называется целочисленной, если ее координаты целые числа. Каждая целочисленная точка плоскости расскрашена в красный или голубой цвет. Докажите, что на плоскости существует по крайней мере один прямоугольник с целочисленными вершинами одинакового цвета.

Время работы: 4 часа 30 минут. **Каждая задача оценивается 7 баллами.**