NOTA ELEVULUI

Asupra problemei G67

Adrian ZAHARIUC[1]

În *RecMat - 2/2004*, p. 157, am propus următoarea problemă:

Problema 1. *Spunem că un număr natural este* **decompozabil** *dacă se poate scrie ca suma a două numere naturale cu aceeaşi sumă a cifrelor. Să se arate că există o infinitate de numere naturale care nu sunt decompozabile.*

În original, problema se referea la o bază de numeraţie oarecare b. Un raţionament simplu (un exemplu trivial şi un argument de paritate) ne arată că în cazul b impar, mulţimea numerelor decompozabile coincide cu mulţimea numerelor pare, deci problema este epuizată. În cazul b par, numerele nedecompozabile sunt mult mai rare. În cele ce urmează, ne vom referi la cazul decimal, $b = 10$, pentru a evita complicaţii inutile. Cititorul poate extinde folosind exact aceeaşi tehnică rezultatul obţinut în cazul $b = 10$ pentru orice număr b par.

Scopul acestei Note este de a da o formă generală simplă tuturor numerelor nedecompozabile. Voi da răspunsul la această problemă încă din enunţ:

Problema 2. *Un număr natural n este nedecompozabil dacă şi numai dacă are una din formele:* $19\ldots99$, $39\ldots99$, $59\ldots99$, $79\ldots99$, $99\ldots99$, *cu un număr impar de cifre sau* $29\ldots99$, $49\ldots99$, $69\ldots99$, $89\ldots99$, *cu un număr par de cifre.*

Soluţie. Să rezolvăm întâi partea mai delicată: dacă n nu are nici una dintre formele menţionate mai sus, atunci n este decompozabil. Aceasta rezultă din următoarele două leme:

Lema 1. *Pentru orice astfel de n, există $a \leq n$ astfel încât*

$$s(a) \equiv s(n-a) (\bmod 2).$$

Demonstraţie. Dacă $s(n)$ este par, atunci luăm direct $a = 0$, deci ne rămâne $s(n)$ impar. În acest caz, n trebuie să aibă o cifră, în afară de prima, diferită de 9 deoarece altfel ar avea una dintre formele interzise. Fie c valoarea acestei cifre şi p poziţia ei (de la dreapta la stânga). Evident, putem alege această cifră astfel încât înaintea ei să nu fie cifra zero. Atunci luăm $a = 10^{p-1}(c+1)$. La adunarea $a + (n-a) = n$ se face un singur transport, deci

$$s(n-a) + s(a) = s(n) + 9 \equiv 0 (\bmod 2) \quad \Rightarrow \quad s(a) \equiv s(n-a) (\bmod 2).$$

Lema 2. *Dacă există $a \leq n$ astfel încât $s(a) \equiv s(n-a) (\bmod 2)$, atunci există $A \leq n$ astfel încât $s(A) = s(n-A)$.*

Demonstraţie. Fie k numărul de cifre ale lui n. Notăm

$$a = \overline{a_1 a_2 \ldots a_k}, \quad n - a = \overline{b_1 b_2 \ldots b_k},$$

unde câteva dintre primele cifre pot fi 0. Ştim că

$$0 \equiv a_1 + \cdots + a_k + b_1 + \cdots + b_k = (a_1 + b_1) + \cdots + (a_k + b_k) (\bmod 2),$$

[1] Elev, cl. a X-a, Colegiul Naţional "Ferdinand I", Bacău

deci numărul elementelor mulţimii $I = \{i \in \{1, 2, \ldots, k\};\ 2$ nu divide $a_i + b_i\}$ este par. Atunci există $I = I_1 \cup I_2$ o partiţie a lui I în două clase cu acelaşi număr de elemente. Fie

$$A_i = \begin{cases} (a_i + b_i)/2, & i \notin I \\ (a_i + b_i + 1)/2, & i \in I_1 \\ (a_i + b_i - 1)/2, & i \in I_2 \end{cases}$$

şi $B_i = a_i + b_i - A_i$, $i = \overline{1, k}$. Este clar că $A_i, B_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Avem

$$\overline{A_1 A_2 \ldots A_k} + \overline{B_1 B_2 \ldots B_k} = \sum_{i=1}^{k} (A_i + B_i)\, 10^{k-i} = \sum_{i=1}^{k} (a_i + b_i)\, 10^{k-i} = a + n - a = n.$$

Avem că

$$\sum_{i=1}^{k} A_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i + b_i}{2} + \frac{|I_1|}{2} - \frac{|I_2|}{2} = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i + b_i}{2},$$

dar

$$\sum_{i=1}^{k} A_i + \sum_{i=1}^{k} B_i = \sum_{i=1}^{k} (a_i + b_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} A_i = \sum_{i=1}^{k} B_i,$$

deci $s(A) = s(n - A)$, unde $A = \overline{A_1 A_2 \ldots A_k}$ şi prima parte este rezolvată.

Să presupunem acum că n are una dintre formele interzise şi să demonstrăm că este nedecompozabil. Să presupunem prin absurd că există $a, b \leq n$ cu $a + b = n$ astfel încât $s(a) = s(b)$. Observaţia esenţială este că la adunarea $a + b = n$ nu se fac transporturi. Să presupunem prin absurd că totuşi am avea transporturi. Să luăm cifra cea mai nesemnificativă (cea mai din dreapta) la care se face transport. Din faptul că este cea mai nesemnificativă cifră cu această proprietate rezultă că la cifra din dreapta sa nu s-a facut transport. Atunci această cifră este obtinuţă doar prin adunarea unei cifre m a lui a cu o cifră n a lui b, dar $m + n \leq 18$, iar restul împărţirii lui $m + n$ la 10 trebuie să fie 9, deci $m + n = 9$. Rezultă că la acea cifră nu s-a făcut transport, contradicţie. Atunci $s(n) = s(a) + s(b) = 2s(a)$, deci $s(n)$ este par, însă nici unul dintre numerele care intră în discuţie nu are suma cifrelor pară şi am ajuns la o contradicţie, deci n este nedecompozabil.

Recreaţii ... matematice

1. În "egalitatea"

$$\frac{XXIII}{VII} = II$$

mutaţi un beţişor astfel încât să obţineţi o egalitate aproximativă cât mai bună.

Roxana Căpăţână, elevă, Iaşi

2. Adăugaţi o cifră pară la dreapta unui număr, astfel încât să obţineţi un număr impar.

Gabriel Popa, Iaşi

Notă. Răspunsurile se găsesc la p. 26.