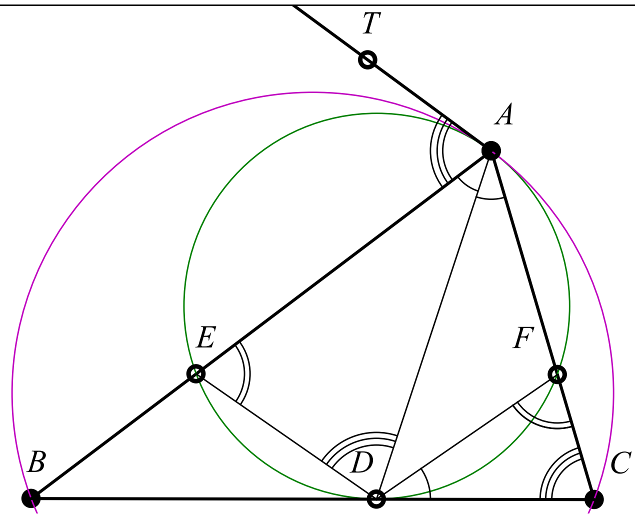
A 14-a OM din Spania-1977, Problema 6:

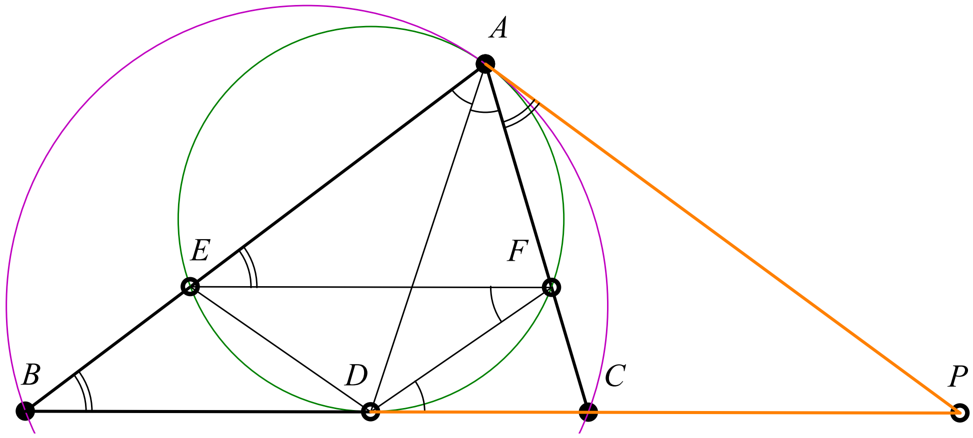
În triunghiul oarecare ABC, notăm cu $D-$piciorul bisectoarei interioare a unghiului $\widehat{BAC}$. Arătaţi că cercul care trece prin vârful A şi este tangent la dreapta BC, în punctul D, este tangent în A la cercul circumscris triunghiului ABC.



SOLUŢIA I (*Mihai Miculiţa*): Notând cu E şi $F-$cel de al doilea punct de intersecţie al cercului care trece prin vârful A şi care este tangent la dreapta suport a laturii $[BC]$, cu latura $[AB]$ şi respectiv $[AC]$; iar cu $T-$un punct arbitrar al tangentei în A, la cercul circumscris triunghiului ABC şi care este situat de aceeaşi parte a dreptei AD cu punctul B; avem:

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r}\widehat{EAD}\equiv\widehat{DAF}\\ BC\cap\odot AEDF=\{D\}\Rightarrow\widehat{DAF}\equiv\widehat{FDC}\end{array}\right\}\Rightarrow\widehat{EAD}\equiv\widehat{FDC} \\ AEDF-inscriptibil\Rightarrow\widehat{AED}\equiv\widehat{DFC}\end{array}\right\}\Rightarrow\widehat{EDA}\equiv\widehat{DCF} \\ AT\cap\odot ABC=\{A\}\Rightarrow\widehat{TAB}\equiv\widehat{DCF}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\widehat{EDA}\equiv\widehat{TAB}\Rightarrow AT\odot AEDF=\{A\}.\blacksquare$$



SOLUŢIA a II-a (*Mihai Miculiţa*): Notând cu $P-$punctul de intersecţie al dreptei suport a laturii $[BC]$cu tangenta în vârful A, la cercul circumscris triunghiului; avem:

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} BC\cap\odot AEDF=\{D\}\Rightarrow\widehat{FDC}\equiv\underline{\widehat{DAF}} \\ \underline{\widehat{DAF}}\equiv\underline{\underline{\widehat{DAE}}}(ip) \\ AEDF-inscriptibil\Rightarrow\underline{\underline{\widehat{DAE}}}\equiv\widehat{EFD}\end{array}\right\}\Rightarrow\widehat{FDC}\equiv\widehat{EFD}\Rightarrow EF\parallel BC\Rightarrow\widehat{AEF}\equiv\widehat{ABC} \\ AP\cap\odot ABC=\{A\}\Rightarrow\widehat{PAC}\equiv\widehat{ABC}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\widehat{AEF}\equiv\widehat{PAC}\Rightarrow AP\cap\odot AEDF=\{A\}.\blacksquare$$

Are loc şi următoarea reciprocă:

În triunghiul oarecare ABC, notăm cu $P-$punctul de intersecţie al dreptei suport a laturii $[BC]$ cu tangenta în vârful $A,$ la cercul circumscris triunghiului; iar cu $D-$acel punct al semidreptei $[PC,$ pentru care avem: $[PD]\equiv[PA].$ Arătaţi că: $\widehat{BAD}\equiv\widehat{DAC}.$

SOLUŢIA I.(*Mihai Miculiţa*): Avem:

$$\left.\begin{array}{r}[PA]\equiv[PD]\Rightarrow\widehat{PAD}\equiv\widehat{ADP}\Rightarrow m\left(\widehat{PAD}\right)=m\left(\widehat{ADP}\right)=m\left(\widehat{BAD}\right)+m\left(\widehat{ABC}\right)\\ AP\cap\odot ABC=\{A\}\Rightarrow\widehat{PAC}\equiv\widehat{ABC}\Rightarrow m\left(\widehat{PAD}\right)=m\left(\widehat{DAC}\right)+m\left(\widehat{PAC}\right)=m\left(\widehat{DAC}\right)+m\left(\widehat{ABC}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\left(\widehat{BAD}\right)+\underline{m\left(\widehat{ABC}\right)}=m\left(\widehat{DAC}\right)+\underline{m\left(\widehat{ABC}\right)}\Rightarrow\widehat{BAD}\equiv\widehat{DAC}.\blacksquare$$

OBSERVAŢIE: Cercul care este tangent în vârful A la cercul circumscris triunghiului ABC şi care trece prin punctul $D,$ este tangent în D la dreapta suport a laturii $[BC].$

SOLUŢIA a II-a (*Titu Zvonaru*): Aşa că, notând cu $\omega-$cercul circumscris triunghiului AEF şi aplicând acum teorema lui CASEY la punctele A,B,C şi la cercul $\omega;$ obţinem că:

$$d\left(A;C\right).d\left(B;\omega\right)=d\left(A;B\right).d\left(C;\omega\right)+d\left(B;C\right).d\left(A;\omega\right)\Leftrightarrow|AC|.|BD|=|AB|.|CD|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{|BD|}{|CD|}=\frac{|AB|}{|AC|}\Leftrightarrow\widehat{BAD}\equiv\widehat{DAC}.\blacksquare$$