OLIMPIADA BALCANICĂ DE MATEMATICĂ PENTRU JUNIORI
2014 - MACEDONIA

1. Determinați toate tripletele de numere prime (p, q, r) care satisfac egalitatea

$$3p^4 - 5q^4 - 4r^2 = 26.$$

2. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic cu aria S. Fie $CD \perp AB$ ($D \in AB$), $DM \perp AC$ ($M \in AC$) și $DN \perp BC$ ($N \in BC$). Notăm cu H_1 și H_2 ortocentrele triunghiurilor MNC și respectiv MND. Calculați aria patrulaterului AH_1BH_2 în funcție de S.

3. Fie a, b, c trei numere reale pozitive, cu $a \cdot b \cdot c = 1$. Arătați că:

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{c}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{a}\right)^2 \geq 3(a + b + c + 1).$$

4. Numărul întreg $n \geq 1$ este arbitrar, dar fixat. Doi jucători A și B joacă următorul joc. Fiind dată o grămadă cu $s \geq 1$ pietricele, jucătorii elimină alternativ (A fiind primul la mutare) un număr de pietricele egal cu 1, sau un număr prim, sau un multiplu nenul al lui n. Câștigătorul este cel care elimină ultima pietricică. Presupunând că atât A cât și B folosesc strategia optimă, determinați pentru câte valori ale lui s nu poate câștiga A.