Prima probă de evaluare pentru juniori, 5 martie 2012

1. Fie $a, b, c, d, e, f, g, h, k$ cifre nenule diferite. Să se determne cea mai mică valoare posibilă a expresiei $E = a \cdot b \cdot c + d \cdot e \cdot f + g \cdot h \cdot k$.

2. Pentru orice numere reale pozitive a, b, c să se demonstreze inegalitatea

$$(a+b+c)^2 + ab + bc + ca \geq 6\sqrt{abc(a+b+c)}.$$

3. Prin vârful A al triunghiului echilateral ABC este dusă dreapta t, paralel la dreapta BC. Pe latura (AC) este luat punctul D astfel încât bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABD$ intersectează dreapta t în punctul E.
Să se demonstreze că $BD = CD + AE$.

4. Fie şirul numeric 12, 24, 26, 38, 40, 52, ...
a) Să se determine dacă în şirul dat figurează numărul 2012.
b) Să se demonstreze că în şirul dat nu sunt pătrate perfecte.

(Timp de lucru 4 ore şi 30 min)

A doua probă de evaluare pentru juniori, 24 martie 2012

1. Să se găsească 2012 numere naturale nenule diferite astfel încât suma acestor numere să fie un pătrat perfect, iar produsul lor să fie un cub perfect.

2. Numerele reale a şi b sunt pozitive, iar numerele reale pozitive c şi d sunt inverse[1]. Să se arate că există un număr natural n astfel încât

$$ab \leq n^2 \leq (a+c)(b+d).$$

3. Fie triunghiul isoscel ABC, cu $CA = CB$. Punctele D şi E aparţin laturilor (AC) şi, respectiv (BC) astfel încât bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle DEB$ şi $\sphericalangle ADE$ se intersectează într-un punct F, care aparţine laturii (AB). Să se demonstreze că F este mijlocul segmentului (AB).

4. Să se determine numărul tuturor perechilor (x, y) de numere întregi nenule care satisfac sistemul de relaţii

$$\begin{cases} (3x+2y) \cdot \left(\dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{y}\right) = 2, \\ x^2 + y^2 \leq 2012. \end{cases}$$

(Timp de lucru 4 ore şi 30 min)

[1] adică satisfac $cd = 1$