Subiecte propuse pentru baraje OBMJ 2011, 7-8 martie 2011

1. Modulul diferenţei soluţiilor ecuaţiei $x^2 + px + q = 0$, cu $p, q \in \mathbb{R}$, este egal cu 4. Să se afle soluţiile ecuaţiei dacă se ştie că $(q + 1)p^2 + q^2$ ia valoare minimă.

2. Numerele reale a, b, x satisfac inegalităţile

$$|a + x + b| \leq 1, \quad |4a + 2x + b| \leq 1, \quad |9a + 6x + 4b| \leq 1.$$

Să se demonstreze că $|x| \leq 15$.

3. Fie triunghiul ABC cu $m(\sphericalangle ACB) = 90^\circ + \frac{1}{2} \cdot m(\sphericalangle ABC)$. Punctul M este mijlocul laturii BC. Un cerc cu centrul în vârful A intersectează dreapta BC în punctele M şi D. Să se demonstreze că $MD = AB$.

4. În sistemul cartezian de coordonate xOy sunt date punctele $A(36, 0)$, $A_1(10, 0)$, $B(0, 36)$, $B_1(0, 10)$, $C(-36, 0)$, $C_1(-10, 0)$, $D(0, -36)$, $D_1(0, -10)$. Un punct al planului se numeşte *laticeal* dacă el are coordonate întregi. Să se determine numărul punctelor laticeale care sunt situate în interiorul pătratului $ABCD$, dar în exteriorul pătratului $A_1B_1C_1D_1$.

5. Numerele reale a, b satisfac $|a| \neq |b|$ şi $\dfrac{a + b}{a - b} + \dfrac{a - b}{a + b} = -\dfrac{5}{2}$. Să se determine valoarea expresiei

$$E = \frac{a^4 - b^4}{a^4 + b^4} - \frac{a^4 + b^4}{a^4 - b^4}.$$

6. Să se afle suma numerelor scrise cu două cifre $\overline{ab}$ pentru care excuaţia $3^{x+y} = 3^x + 3^y + \overline{ab}$ are cel puţin o soluţie (x, y) în numere naturale.

7. În dreptunghiul $ABCD$ cu $AB > BC$, mediatoarea diagonalei AC intersectează latura CD în punctul E. Cercul cu centrul în punctul E şi raza AE intersectează din nou latura AB în punctul F. Dacă punctul O este proiecţia ortogonală a punctului C pe dreapta EF, să se demonstreze că punctele B, O şi D sunt coliniare.

8. Numerele naturale m şi k satisfac egalitatea

$$1001 \cdot 1002 \cdot \ldots \cdot 2010 \cdot 2011 = 2^m(2k + 1).$$

Să se afle numărul m.