OLIMPIADA BALCANICĂ DE MATEMATICĂ PENTRU JUNIORI
2010 - ROMÂNIA

1. Numerele reale a, b, c, d satisfac simultan egalitățile

$$abc - d = 1, \quad bcd - a = 2, \quad cda - b = 3, \quad dab - c = -6.$$

Arătați că $a + b + c + d \neq 0$.

2. Găsiți toate numerele întregi n, $n \geq 1$, astfel încât $n \cdot 2^{n+1} + 1$ să fie un pătrat perfect.

3. Fie AL și BK bisectoarele unghiurilor triunghiului neisoscel ABC (L aparține laturii BC, iar K aparține laturii AC). Mediatoarea segmentului BK intersectează dreapta AL în punctul M. Punctul N aparține dreptei BK astfel încât dreapta LN să fie paralelă cu dreapta MK. Demonstrați că $LN = NA$.

4. Un dreptunghi de tipul 9×7 este acoperit cu două tipuri de piese ca cele de mai jos (piesele sunt compuse din trei, respectiv patru pătrate unitate, iar piesa în formă de L poate fi rotită în mod repetat cu câte $90°$).

Fie $n \geq 0$ numărul de piese de tipul 2×2 ce pot fi utilizate pentru o astfel de acoperire. Găsiți toate valorile pe care le poate avea n.