

Subiecte propuse pentru baraje OBMJ 2010, 1-2 martie 2010

1. Numerele reale pozitive a, b, c, d satisfac egalitatea

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \cdot \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) + \frac{1}{ab} + \frac{1}{cd} = \frac{6}{\sqrt{abcd}}.$$

Să se afle valoarea raportului

$$\frac{a^2 + ac + c^2}{b^2 - bd + d^2}.$$

2. Numerele reale pozitive x și y satisfac relația $x + y = 3\sqrt{xy}$. Să se afle valoarea numerică a expresiei

$$E = \left| \frac{x-y}{x+y} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{x^3-y^3}{x^3+y^3} \right|.$$

3. Tangenta la cercul circumscris triunghiului ABC , dusă prin vârful A , intersectează dreapta BC în punctul P , iar tangentele la același cerc, duse prin B și C , taie dreptele AC și, respectiv AB în punctele Q și R . Să se demonstreze că punctele P, Q și R sunt coliniare.

4. În cele 25 de pătrățele ale unui pătrat 5×5 sunt scrise inițial zerouri. În fiecare minută Ionel alege două pătrățele cu latură comună. Dacă în ele sunt scrise numerele a și b , atunci el scrie în locul lor numerele $a+1$ și $b+1$ sau $a-1$ și $b-1$. Peste un anumit timp el a observat că sumele numerelor din fiecare linie sunt egale, precum și sumele numerelor din fiecare coloană sunt egale. Să se demonstreze că această observație a fost făcută după un număr par de minute.

5. Pentru orice numere strict pozitive a și b să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{a}{a+b} \cdot \frac{a+2b}{a+3b} < \sqrt{\frac{a}{a+4b}}.$$

6. Într-un triunghi dreptunghic cu catetele de lungimi b și c și ipotenuza de lungime a , raportul dintre lungimea ipotenuzei și lungimea diametrului cercului înscris nu depășește $1 + \sqrt{2}$. Să se determine valoarea numerică a expresiei

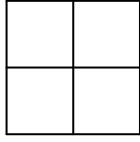
$$E = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$

7. În triunghiul ABC cu $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|CA| = b$ au loc simultan relațiile

$$a \geq \max\{b, c, \sqrt{bc}\}, \quad \sqrt{(a-b)(a+c)} + \sqrt{(a-c)(a+b)} \geq 2\sqrt{a^2 - bc}.$$

Să se demonstreze că triunghiul ABC este isoscel.

8. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine pătratul de dimensiuni $n \times n$ cu aria minimă care poate fi pardosit (acoperit fără suprapunere) cu același număr de figuri



și

