Primul baraj de selecţie pentru OBM Juniori 2007, Chişinău, 5 martie 2007

1. Numerele d_1, d_2, $\ldots$ d_6 sunt cifre distincte ale sistemului zecimal de numeraţie diferite de 6. Să se demonstreze că $d_1 + d_2 + \ldots + d_6 = 36$ dacă şi numai dacă $(d_1 - 6)(d_2 - 6) \cdot \ldots \cdot (d_6 - 6) = -36$.

2. Numerele reale a_1, a_2, a_3 sunt mai mari ca 1 şi au suma egală cu S. Dacă pentru orice $i = 1, 2, 3$ au loc relaţiile $\dfrac{a_i^2}{a_i - 1} > S$, să se demonstreze inegalitatea

$$\frac{1}{a_1 + a_2} + \frac{1}{a_2 + a_3} + \frac{1}{a_3 + a_1} > 1.$$

3. Fie triunghiul ABC cu $BC = a$, $AC = b$ şi $AB = c$. Un punct P interior triunghiului are proprietatea că pentru orice dreaptă ce trece prin P şi intersectează dreptele AB şi AC în punctele distincte E şi F avem relaţia $\dfrac{1}{AE}+\dfrac{1}{AF} = \dfrac{a+b+c}{bc}$. Să se demonstreze că punctul P este centrul cercului înscris în triunghiul ABC.

4. Vârsta medie a partcipanţilor la un concurs de matematică (gimnazişti şi liceişti) creşte exact cu o lună dacă în concurs sunt incluşi trei liceişti de vârstă 18 ani fiecare sau dacă din concurs sunt excluşi trei gimnazişti de vârstă 12 ani fiecare. Câţi participanţi erau iniţial în concurs?

Al doilea baraj de selecţie pentru OBM Juniori 2007, Chişinău, 23 martie 2007

5. Să se determine cel mai mic număr natural scris în sistemul zecimal cu produsul cifrelor egal cu $10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 9 \cdot 10$.

6. Lungimile laturilor a, b şi c ale unui triunghi dreptunghic satisfac relaţiile $a < b < c$, iar α este măsura celui mai mic unghi al triunghiului. Pentru care valori reale k ecuaţia $ax^2 + bx + kc = 0$ are soluţii reale pentru orice măsură a unghiului α ce nu depăşeşte 18°.

7. Să se arate că există un pătrat cu latura de lungime 14 care admite o pardosire (acoperire exactă a ariei pătratului) cu 21 de pătrate astfel încât printre ele există exact 6 pătrate cu latura de lungime 1, 5 pătrate cu latura de lungime 2, 4 pătrate cu latura de lungime 3, 3 pătrate cu latura de lungime 4, 2 pătrate cu latura de lungime 5 şi un pătrat cu latura de lungime 6.

8. a) Să se calculeze produsul

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2006}\right)\left(1+\frac{1}{2007}\right).$$

b) Fie mulţimea

$$A=\left\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{2006},\ \frac{1}{2007}\right\}.$$

Să se determine suma tuturor produselor câte 2, câte 4, câte 6, …, câte 2004 şi câte 2006 elemente diferite ale mulţimii A.