A 11-A OLIMPIADĂ BALCANICĂ DE MATEMATICĂ PENTRU JUNIORI

Shumen, Bulgaria, 25-30 iunie 2007

prezentare de **Dinu Şerbănescu** şi **Dan Schwarz**

Cea de-a 11-a Olimpiadă Balcanică de Matematică pentru juniori a fost găzduită de Bulgaria, în oraşul Shumen. Au participat 65 de concurenţi din 11 ţări, care au avut de rezolvat în 4 ore şi jumătate următoarele probleme:

1. Fie a real pozitiv, astfel încât $a^3 = 6(a+1)$. Demonstraţi că ecuaţia:

$$x^2 + ax + a^2 - 6 = 0$$

nu are soluţii reale.

2. Fie patrulaterul convex $ABCD$ astfel încât $\sphericalangle CBD = 18°$, $\sphericalangle BDC = \sphericalangle CAD = 36°$ şi $\sphericalangle BAC = 72°$. Fie P punctul de intersecţie a diagonalelor AC şi BD. Determinaţi măsura unghiului $\sphericalangle APD$.

3. Fie 50 de puncte în plan, oricare trei necoliniare. Aceste puncte sunt colorate, fiecare cu una din patru culori date. Demonstraţi că există o culoare, şi cel puţin 130 de triunghiuri scalene, cu vârfurile printre punctele colorate cu această culoare.

4. Fie p un număr prim. Demonstraţi că $7p + 3^p - 4$ nu este pătrat perfect.

Primele două probleme au fost propuse de Grecia, a treia de Macedonia, iar ultima de Turcia. Echipa României a fost formată din următorii 6 elevi: *Chindea Filip*, *Bumbăcea Radu*, *Filip Laurian*, *Tiba Marius*, *Ciolan Emil Alexandru*, *Muntean Alexandru*, fiind condusă de *Dinu Şerbănescu*, *Mircea Fianu* şi *Dan Schwarz*.

Prezentăm soluţiile problemelor din concurs.

1. Trebuie arătat că discriminantul ecuaţiei $x^2 + ax + a^2 - 6 = 0$, anume $\Delta = a^2 - 4(a^2 - 6) = 3(8 - a^2)$, este strict negativ. Într-adevăr, în caz contrar avem $a^2 \leq 8$; cum $a > 0$ rezultă $a^3 \leq 8a$. Dar $a^3 = 6a + 6$, deci $6a + 6 \leq 8a$. Obţinem $a \geq 3$, în contradicţie cu $a^2 \leq 8$.

Remarcă. Să notăm $P(x) = x^3 - 6x - 6$, $Q(x) = x^2 + ax + a^2 - 6$. Se vede imediat că $P(x) = (x-a)Q(x) + P(a)$, deci $P(x) = (x-a)Q(x)$. Înseamnă că $P(x)$ nu are alte soluţii reale diferite de a.

Cum $P(0) = -6 < 0$ şi $P(3) = 3 > 0$, rezultă că există o soluţie reală pozitivă pentru $P(x) = 0$, deci aceasta este cu necesitate a, aşadar condiţia de pozitivitate din enunţ era superfluă.

2. Să considerăm cercul Γ circumscris triunghiului ΔBAD. Cum $\sphericalangle BAD = 36° + 72° = 108°$, iar $\sphericalangle BCD = 180° - 18° - 36° = 126°$, rezultă că punctul C este interior cercului Γ. Să notăm cu E intersecţia prelungirii lui DC cu Γ, şi cu F intersecţia prelungirii lui AC cu Γ.

Se citeşte imediat pe figură că $\sphericalangle DBF = \sphericalangle CAD = 36^\circ$ şi $\sphericalangle BDF = \sphericalangle BAC = 72^\circ$, deci C este centrul cercului înscris triunghiului ΔBDF, aşadar FC este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BFD$, şi deci $\sphericalangle BFA = \sphericalangle AFD = 36^\circ$.

Rezultă $\sphericalangle APD = 108^\circ$.

Remarcă. O soluţie alternativă arată că A este centrul cercului circumscris triunghiului ΔBCD. Considerăm însă că soluţia de mai sus pătrunde în esenţa problemei, căci arată clar că pentagonul $ABEFD$ este regulat, C fiind intersecţia bisectoarei unghiului $\sphericalangle B$ cu diagonala DE. Este foarte probabil că această configuraţie a stat la baza compunerii acestei probleme de către autorii săi.

Ca un îndemn pentru cititori, menţionăm că înaintea coordonării problemelor, comisia dispunea de şase soluţii ale acestei probleme.

3. Cum $\frac{50}{4} > 12$, (cel puţin) o culoare c a fost folosită pentru a colora (cel puţin) 13 puncte (principiul cutiei, numit şi ***principiul lui Dirichlet***). Vom folosi următoarea:

Lemă. ***Fiind date $n \geq 3$ puncte în plan, oricare trei necoliniare, nu se pot forma mai mult de $n(n-1)$ triunghiuri isoscele (incluzând echilaterale) cu vârfurile printre aceste puncte.***

Demonstraţie. Pe mediatoarea unui segment determinat de două din aceste puncte se pot afla cel mult două alte puncte (altfel am avea trei puncte coliniare), deci vor exista cel mult două triunghiuri isoscele având acest segment drept bază. Rezultă că se vor forma cel mult $2\binom{n}{2} = n(n-1)$ triunghiuri isoscele cu vârfurile printre aceste puncte. $\square$

Fie atunci n numărul punctelor colorate cu culoarea c. Deoarece în total se formează $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ triunghiuri, iar lema limitează numărul triunghiurilor isoscele la $n(n-1)$, înseamnă că vor exista cel puţin :

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} - n(n-1) = \frac{n(n-1)(n-8)}{6}$$

triunghiuri scalene. Cum avem $n \geq 13$, rezultă existenţa a cel puţin 130 triunghiuri scalene.

Remarcă. Se observă că este improbabil ca numărul maxim calculat, de $n(n-1)$ triunghiuri isoscele, să poată fi efectiv realizat. Pentru $n < 8$, acest număr rezultă chiar strict mai mare decât numărul *total* de triunghiuri!, deci evident imposibil de realizat. (Cazul $n = 6$ este de fapt singurul pentru care *toate* triunghiurile pot fi isoscele, cu model pentagonul regulat şi centrul său).

Cel mai bun rezultat pentru care dispunem de un model, pentru n par, este dat de poligonul regulat cu $n-1$ vârfuri şi centrul său, când se formează $(n-1)(n-2)$ triunghiuri isoscele.

Rămâne ca problemă deschisă, de cercetare, determinarea unei margini superioare mai „strânse" pentru numărul triunghiurilor isoscele formate (măcar demonstrarea faptului că nu există configuraţii astfel încât pe mediatoarea fiecărui segment să se afle exact două alte puncte!).

4. Pentru $p = 2$ avem $7p + 3^p - 4 = 7 \cdot 2 + 3^2 - 4 = 19$, care nu este pătrat perfect. Fie deci $p \geq 3$ (aşadar p impar). Pe de o parte, $7p + 3^p - 4 \equiv \equiv 3 - 4 = -1 (\text{mod } p)$.[1] deci, pentru a fi pătrat perfect, $p \equiv 1 \ (\text{mod } 4)$.[2] Dar atunci $7p + 3^p - 4 \equiv -p + (-1)^p = -p - 1 \equiv 2 (\text{mod } 4)$, în timp ce resturile pătratice modulo 4 sunt doar 0 şi 1.

Remarcă. Deşi având o soluţie relativ scurtă şi clar indicată de particularităţile enunţului, această problemă s-a dovedit dificilă, fiind cea mai „tehnică" din concurs. Încercările de a studia congruenţe modulo 8 sau 7 se dovedesc nefructuoase, neconducând la o contradicţie.

Faptul că valoarea -1 nu poate fi rest pătratic modulo $p > 2$ prim, decât pentru $p \equiv 1 (\text{mod } 4)$, nu trebuia demonstrat, fiind considerat ca extrem de cunoscut. Desigur, putea fi justificat şi folosind simbolul Legendre $\left(\dfrac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$, pentru $p > 2$ prim.