Primul baraj de selecţie pentru OBM Juniori 2006, Chişinău, 6 martie 2006

1. Cinci segmente diferite au astfel de lungimi, încât oricare trei dintre ele pot fi laturi ale unui triunghi. Să se arate că printre toate triunghiurile de acest fel există cel puţin un triunghi ascuţitunghic.

2. Să se arate că printre numerele naturale de forma $18^m + 45^m + 50^m + 125^m$, $m \in \mathbb{N}$ există oricât de multe numere divizibile prin 2006.

3. Poligonul convex $A_1A_2 \ldots A_{2006}$ are laturile opuse paralele: $A_1A_2 \parallel A_{1004}A_{1005}$, $A_2A_3 \parallel A_{1005}A_{1006}$, $\ldots$, $A_{1003}A_{1004} \parallel A_{2006}A_1$. Să se demonstreze că diagonalele principale A_1A_{1004}, A_2A_{1005}, $\ldots$, $A_{1003}A_{2006}$ sunt concurente dacă şi numai dacă laturile opuse ale poligonului sunt congruente.

4. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$. Pe fiecare din cele n fise aranjate pe un cerc este scris numărul 1 sau -1. Printr-o întrebare se poate afla produsul numerelor pe oricare trei fise. Care este numărul minim de întrebări puse suficiente pentru determinarea produsului celor n numere?

Al doilea baraj de selecţie pentru OBM Juniori 2006, Chişinău, 25 martie 2006

5. Fie dat numărul x. Prin operaţii de înmulţire şi împărţire a oricăror două numere date sau deja calculate pot fi obţinute puteri cu exponent natural ale numărului x (de exemplu, $x \cdot x = x^2$, $x^2 \cdot x^2 = x^4$, $x^4 : x = x^3$, etc). Să se determine numărul minim de operaţii cu ajutorul cărora poate fi calculat numărul x^{2006}. Argumentaţi răspunsul.

6. În dreptunghiul $ABCD$ punctele M şi N sunt mijloacele laturilor AD şi respectiv BC. Punctul P aparţine semidreptei $(CD$, astfel încât $D \in (CP)$, iar dreapta PM intersectează diagonala AC în punctul Q. Să se demonstreze că $m(\sphericalangle MNQ) = m(\sphericalangle MNP)$.

7. Să se determine toate polinoamele de gradul doi cu coeficienţi întregi de forma $P(X) = aX^2 + bX + c$ care satisfac relaţiile $P(a) = b$, $P(b) = a$ pentru $a \neq b$.

8. Să se determine toate soluţiile reale ale ecuaţiei

$$\frac{x^2}{x-1} + \sqrt{x-1} + \frac{\sqrt{x-1}}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}.$$