Primul baraj de selecţie pentru OBM Juniori 2005, Chişinău, 7 aprilie 2005

1. Fie triunghiul ABC, în care lungimea laturii BC este mai mică decât lungimile laturilor AC şi AB. Fie $P \in (AB)$, astfel încât $m(\sphericalangle PCB) = m(\sphericalangle BAC)$, iar $Q \in (AC)$, astfel încât $m(\sphericalangle QBC) = m(\sphericalangle BAC)$. Să se demonstreze că dreapta care trece prin centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC şi APQ este perpendiculară pe latura BC.

2. Să se demonstreze că:
a) există o infinitate de numere naturale de forma $3p + 1$, $p \in \mathbb{N}$, care pot fi reprezentate sub forma $m^3 - n^3$, unde $m, n \in \mathbb{N}$;
b) există o infinitate de numere naturale de forma $5q + 1$, $q \in \mathbb{N}$, care pot fi reprezentate sub forma $k^3 - \ell^3$, unde $k, \ell \in \mathbb{N}$.

3. Fie a_1, a_2, ..., a_n numere reale pozitive. Notăm: $s = a_1 + a_1 + \ldots + a_n$, $p = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$. Să se arate că $2^n\sqrt{p} \le 1 + \dfrac{s}{1!} + \dfrac{s^2}{2!} + \ldots + \dfrac{s^n}{n!}$.
(Dacă $n \in \mathbb{N}^*$, atunci $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

4. Fie dată $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ cu $f(1) = 1$ şi care verifică condiţiile:
1) $3f(n) \cdot f(2n+1) = f(2n) \cdot \big(1 + 3f(n)\big)$,
2) $f(2n) < 6f(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Să se gasească toate soluţiile ecuaţiei $f(k) + f(\ell) = 293$, $k < \ell$.

Al doilea baraj de selecţie pentru OBM Juniori 2005, Chişinău, 8 aprilie 2005

5. Fie triunghiul ascuţitunghic ABC, în care CF este înălţime, $F \in (AB)$, iar BM este mediană, $M \in (CA)$, astfel încât $BM = CF$. Atunci $m(\sphericalangle MBC) = m(\sphericalangle FCA)$ dacă şi numai dacă triunghiul ABC este echilateral.

6. Fie n un număr natural nenul, iar x_1, x_2, ..., x_n numere reale pozitive care verifică condiţia $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_n} = n$. Să se găsească valoarea minimală a expresiei $x_1 + \dfrac{x_2^2}{2} + \dfrac{x_3^3}{3} + \ldots + \dfrac{x_n^n}{n}$.

7. Fie p un număr prim, iar a şi n numere naturale nenule. Să se demonstreze că dacă $2^p + 3^p = a^n$, atunci $n = 1$.

8. Se consideră familiile de funcţii de gradul al doilea f_m, $g_m : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_m(x) = (m^2+1)x^2 + 3mx + m^2 - 1$, $g_m(x) = m^2x^2 + mx - 1$, unde m este

un parametru real nenul.
Să se arate că, pentru orice funcţie h de gradul al doilea cu proprietatea că $g_m(x) \leq h(x) \leq f_m(x)$ pentru orice x real, există $\lambda \in [0, 1]$ care verifică condiţia $h(x)) = \lambda f_m(x) + (1 - \lambda)g_m(x)$, oricare ar fi x real.