Primul baraj de selecţie pentru Olimpiada Balcanică de Matematică pentru Juniori 2004

1. Să se determine toate tripletele de numere întregi (x, y, z) care verifică inecuaţia $x^2 + y^2 + z^2 < xy + 3y + 2z$.

2. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă numerele reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$ verifică relaţia $a_1+a_2+\ldots+a_n \geq 0$, să se demonstreze inegalitatea

$$\sqrt{a_1^2+1} + \sqrt{a_2^2+1} + \ldots + \sqrt{a_n^2+1} \geq \sqrt{2n(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)}.$$

3. Fie paralelogramul $ABCD$ şi punctul M mijlocul lui $[AB]$ astfel încât patrulaterul $MBCD$ este inscriptibil. Dacă N este punctul de intersecţie al dreptelor DM şi BC şi $P \in BC$, atunci să se arate că semidreapta $(DP$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ADM$ dacă şi numai dacă $PC = 4BC$.

4. Numerele naturale nenule diferite $a_1, a_2, \ldots, a_{12}$ satisfac condiţia:
toate diferenţele pozitive diferite de două numere a_i şi a_j formează o mulţime de 20 de numere naturale consecutive.
a) Să se arate că $\max\{a_1, a_2, \ldots, a_{12}\} - \min\{a_1, a_2, \ldots, a_{12}\} = 20$.
b) Să se determine 12 numere naturale concrete cu proprietatea din enunţ.

Al doilea baraj de selecţie pentru Olimpiada Balcanică de Matematică pentru Juniori 2004

5. Şîrul de numere naturale $1, 5, 6, 25, 26, 30, 31, \ldots$ este alcătuit din puteri ale lui 5 cu exponenţi naturali sau sume de puteri ale lui 5 cu exponenţi naturali diferiţi, scrise în ordine crescătoare. Să se determine termenul şirului scris pe poziţia 167. [1]

6. Să se reprezinte polinomul $P(X) = X^{100} + X^{20} + 1$ ca produs de 4 polinoame de grad nenul cu coeficienţi întregi.

7. Fie triunghiul ABC de arie 1. Bisectoarele interioare ale unghiurilor $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ABC$ şi $\sphericalangle BCA$ intersectează laturile (BC), (AC), (AB) şi cercul circumscris triunghiului ABC respectiv în punctele L şi G, N şi F, Q şi E. Dreptele EF, FG şi GE intersectează bisectoarele (AL), (CQ) şi (BN) respectiv în punctele P, M şi R. Să se determine aria hexagonului $LMNPQR$.

8. Pe tablă sunt scrise numerele reale pozitive a şi b $(a > b)$. La fiecare pas, cu numerele scrise pe tablă, se poate efectua una din următoarele operaţii:

[1] vezi şi problema 7 de la AIME 1986
https://www.artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=1986_AIME_Problems/Problem_7

a) se alege unul din numere şi se scrie pătratul lui sau inversul lui;
b) se aleg două numere scrise pe tablă şi se scrie suma lor sau diferenţa lor pozitivă.
Să se arate cum poate fi obţinut produsul $a \cdot b$ cu ajutorul operaţiilor definite.